

РОЗРОБЛЕННЯ ТА МОДЕРНІЗАЦІЯ ОБТ

УДК 531.553:531.555

О.В. Білаш

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

ВПЛИВ ОБЕРТАННЯ ЗЕМЛІ НА ПАРАМЕТРИ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ ОБ'ЄКТІВ

В роботі чисельно проаналізовано вплив Коріолісової сили на параметри траєкторії руху снаряда, коли площина стрільби збігається із площиною меридіана. Всі розрахунки проводилися за допомогою математичного пакету MAPLE. Побудовано графічні залежності, які характеризують відхилення снаряда від площини стрільби, його дальності. У статті показано незначний вплив врахування обертання Землі та широти місцевості на максимальну висоту польоту снаряда. Визначено, що ці відхилення мають різні напрямки в залежності від стрільби (на південь чи на північ) при тому самому куті кидання і однаковій початковій швидкості снаряда. Аналіз показав, що найбільшим буде відхилення на захід при куті $\theta = 65^\circ$, на схід - при куті $\theta = 130^\circ$, а мінімальне значення (близько 0) буде при куті $\theta = 105^\circ$.

Ключові слова: меридіальна площина стрільби, Коріолісова сила, снаряд, рівняння руху, закон руху, дальність, висота, відхилення.

Постановка проблеми

Дослідження чинників, які впливають на траєкторію руху снаряда, є актуальним завданням, оскільки від точності стрільби залежить успіх бойових дій.

Зауважимо [1, 2], що для визначення траєкторії руху снаряда (міни) необхідно знати вхідні (початкові) умови, до яких належить початкова швидкість, кут кидання, маса снаряда. Знаходження оптимальних методів визначення вхідних даних є проблемою, яку необхідно вирішити, поєднуючи теоретичні та експериментальні дослідження, що дозволить готувати артилерію до стрільби з необхідною точністю і при мінімальних затратах часу.

Одним із важливіших завдань є визначення кількісного впливу Коріолісової сили на траєкторію руху снаряда як одного із чинників, який впливає на її зміну.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз наукової літератури [3, 4] показав, що незважаючи на велику кількість публікацій усе ж є низка проблем, які необхідно вирішити, оскільки від точності оцінки всіх чинників впливу на рух снаряда залежить ефективність виконання вогневих завдань артилерійськими підрозділами. Дослідження впливу Коріолісової сили на рух снаряда (міни) поблизу поверхні Землі у [3, 4] зведено тільки до визначення якісного впливу цієї сили на відхилення тіла від площини стрільби.

Мета статті

Оцінити кількісно вплив Коріолісової сили на параметри траєкторії руху снаряда, коли площина стрільби збігається з площиною меридіана.

Формулювання умови задачі

Нехай бойова позиція знаходиться на широті φ і площина стрільби збігається з меридіальною площиною. Опір повітря не враховується, а g вважається сталою величиною. Початкова швидкість снаряда (міни) рівна V_0 і утворює кут θ з площиною горизонту. Зв'яжемо з Землею рухома систему координат Охуз при умові, що позиція стрільби збігається з початком координат, направивши вісь Оу на схід, а вісь Ох – на південь, вісь Oz – вертикально вгору, вздовж радіуса Землі R . Якщо позначити масу снаряда через m , тоді

$$P = mg, \quad (1)$$

де g – прискорення земного тяжіння.

Кутова швидкість обертання Землі у вибраній системі координат матиме проекції (рис. 1)

$$\omega_x = -\omega \cos \varphi, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega \sin \varphi. \quad (2)$$

Рівняння відносно руху снаряда, врахувавши силу ваги і Коріолісову силу I_c , буде мати вигляд

$$m\ddot{r} = P + I_c, \quad (3)$$

де

$$I_c = -m\omega_c, \quad (4)$$

ω_c – прискорення Коріолісове, яке рівне

$$\omega_c = 2(\omega \times v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

де $r = -xi + yj + zk$ – радіус вектор точки, а x, y, z – її координати, $v = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k$ – її відносна швидкість, i, j, k – одиничні орти декартової системи координат $Oxyz$.

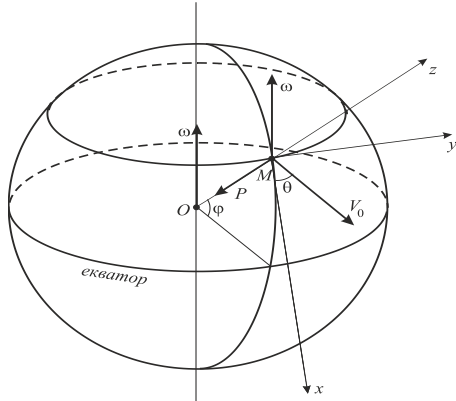


Рис. 1. Схема розміщення площини стрільби і рухомої системи координат

Якщо врахувати (1), (2), (4) і (5), то з (3) можемо отримати рівняння руху снаряда в координатній формі

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega \sin \varphi \dot{y}, \\ \ddot{y} &= -2\omega (\cos \varphi \dot{z} + \sin \varphi \dot{x}), \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \cos \varphi \dot{y}. \end{aligned} \quad (6)$$

При таких початкових умовах

$$t = 0, x = y = z = 0, \dot{y} = 0, \dot{x} = V_0 \cos \theta, \dot{z} = V_0 \sin \theta. \quad (7)$$

Виклад основного матеріалу

Проінтегруємо по часу перше та третє рівняння (6) по часу, матимемо

$$\dot{x} = 2\omega \sin \varphi y + C_1, \quad \dot{z} = -gt + 2\omega \cos \varphi y + C_3, \quad (8)$$

де C_1 і C_3 – сталі інтегрування, для їх знаходження скористаємося початковими умовами (7)

$$C_1 = V_0 \cos \theta, \quad C_3 = V_0 \sin \theta. \quad (9)$$

Враховавши (9), на основі (8) знайдемо

$$\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi = 2\omega y - gt \cos \varphi + V_0 \sin(\varphi + \theta). \quad (10)$$

Підставимо (10) у друге рівняння (6), матимемо рівняння для знаходження координати у снаряда

$$\ddot{y} + 4\omega^2 y = tC_4 + C_5, \quad (11)$$

де

$$C_4 = 2\omega g \cos \varphi, \quad C_5 = -2\omega V_0 \sin(\varphi + \theta). \quad (12)$$

Розв'язавши рівняння (11), отримаємо

$$y = A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t + C_6 t + C_7, \quad (13)$$

де

$$C_6 = \frac{g \cos \varphi}{2\omega}, \quad C_7 = -\frac{1}{2\omega} V_0 \sin(\varphi + \theta), \quad (14)$$

A і B – сталі інтегрування, які знайдемо на основі початкових умов (7)

$$A = -C_7, \quad B = -\frac{g \cos \varphi}{4\omega^2} = -\frac{C_6}{2\omega}. \quad (15)$$

Враховавши (15), з (13) одержимо

$$y(t) = C_7 (1 - \cos 2\omega t) + C_6 \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right). \quad (16)$$

Підставимо (16) у (8) та проінтегруємо по t , враховавши при цьому початкові умови (7), будемо мати

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t) \sin \varphi + V_0 t \cos \theta, \\ z(t) &= -\frac{gt^2}{2} + V_0 t \sin \theta + f(t) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} f(t) &= -V_0 \sin(\varphi + \theta) \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right] + \\ &+ g \cos \varphi \left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{4\omega^2} (1 - \cos 2\omega t) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Зауважимо, що підкреслені доданки у (17) характеризують рух снаряда без врахування Коріолісової сили.

Так як кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі рівна [5]

$$\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1},$$

то $2\omega t$ є малою величиною, тому скористаємося розвиненнями [7] для малих

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots \end{aligned}$$

Беручи до уваги тільки декілька членів у розвиненнях функцій $\sin 2\omega t$ і $\cos 2\omega t$, після відповідних перетворень (16) і (18) набудуть вигляду

$$y(t) = -V_0 \omega \sin(\varphi + \theta) t^2 + \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos \varphi,$$

$$f(t) = \frac{1}{3} \omega^2 t^3 \left[-2V_0 \sin(\varphi + \theta) + \frac{gt}{2} \cos \varphi \right]. \quad (19)$$

Числовий аналіз. Для знаходження часу падіння снаряда t_1 було числово розв'язано рівняння

$$-\frac{gt^2}{2} + V_0 \sin \theta t + \cos \varphi f(t) = 0,$$

та знайдено дальність польоту снаряда s та відхилення δ від площини стрільби

$$s = \sqrt{\tilde{s}^2 + \delta^2}, \quad \delta = -V_0 t_1^2 \omega \sin(\varphi + \theta) + \frac{1}{3} g \omega t_1^3 \cos \varphi,$$

де

$$\tilde{s} = V_0 t_1 \cos \theta + f(t_1) \sin \varphi.$$

Для знаходження максимальної висоти польоту снаряда H було числово розв'язано рівняння

$$-gt + V_0 \sin \theta + 2\omega^2 t^2 \cos \varphi \left[(V_0 \sin(\varphi + \theta)) + \frac{gt^2}{3} \cos \varphi \right],$$

та отримане значення часу t_2 , що відповідає максимальній висоті польоту снаряда

$$H = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t_2 \sin \theta + \cos \varphi f(t_2).$$

З використанням математичного пакету MAPLE був проведений числовий аналіз задачі, який поданий на рис. 2-4, коли позиція стрільби знаходиться на широті $\varphi = 50^\circ$.

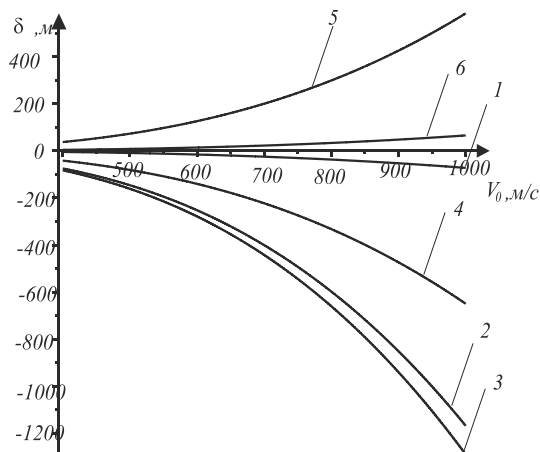


Рис. 2. Графічна залежність від початкової швидкості відхилення падіння снаряда δ від площини стрільби при різних θ

На рис. 2 подано графічну залежність відхилення падіння снаряда δ від площини стрільби від початкової швидкості V_0 при різних значеннях кута кидання снаряда θ . Крива 1 відповідає куту кидання $\theta = 10^\circ$, крива 2 - $\theta = 50^\circ$, крива 3 - $\theta = 65^\circ$, крива 4 - $\theta = 90^\circ$, крива 5 - $\theta = 130^\circ$, крива 6 - $\theta = 170^\circ$. Як видно з рис. 2, при стрільбі

на південь $\theta < 90^\circ$ (північ $180^\circ > \theta > 90^\circ$) відхилення снаряда відбувається на захід (схід), причому відхилення при стрільбі на південь є більшим, ніж при стрільбі на північ.

Окрім того, числовий аналіз показав, що, стріляючи на південь, найбільшим буде відхилення при куті $\theta = 65^\circ$, а на північ — при куті $\theta = 130^\circ$. Мінімальне (близько 0) відхилення буде при куті $\theta = 105^\circ$. Причому при збільшенні початкової швидкості збільшується відхилення δ , однак при різних значеннях θ воно буде різним, а при фіксованій швидкості V_0 , δ спочатку зростає, а потім спадає з ростом θ . Окрім того, при стрільбі на північ, коли виконується нерівність $90^\circ < \theta < 105^\circ$, то відхилення відбувається на захід, а не на схід.

На рис. 3 подано відхилення падіння снаряда δ від площини стрільби від θ при різних значеннях початкової швидкості V_0 . Крива 1 відповідає швидкості $V_0 = 400$ м/с, крива 2 - $V_0 = 600$ м/с, крива 3 - $V_0 = 800$ м/с, крива 4 - $V_0 = 900$ м/с, крива 5 - $V_0 = 1000$ м/с. Окрім того, коли кут кидання становить $\theta = 105^\circ$, то незалежно від початкової швидкості снаряда відхилення δ буде відсутнє.

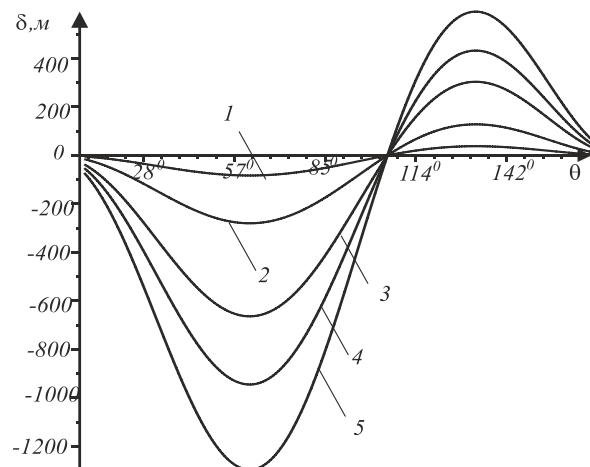


Рис. 3. Графічна залежність відхилення падіння снаряда δ від площини стрільби від θ при різних початкових швидкостях

З рис. 3 видно, що максимальне значення δ досягається, коли $\theta = 65^\circ$, що свідчить про те, що при цьому куті буде найбільше відхилення на захід незалежно від швидкості, а коли $\theta = 130^\circ$, то максимальне відхилення на схід. Отже, на відхилення снаряда від площини стрільби впливає як початкова швидкість, так і кут кидання θ .

Окрім того було досліджено залежність δ від широти стрільби φ при фіксованих θ і початковій

швидкості V_0 . Аналіз цих даних показав, що для України широта місцевості не значно впливає на відхилення δ .

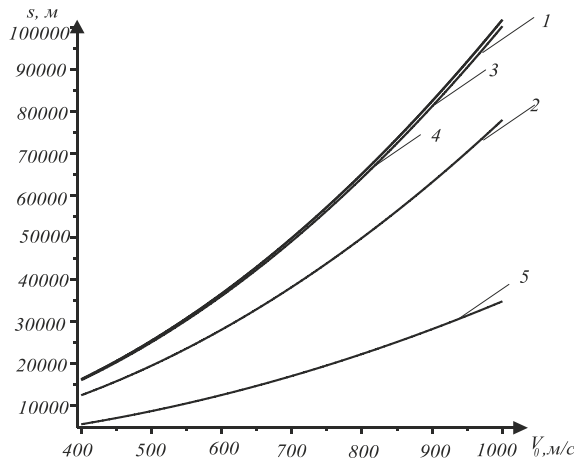


Рис. 4. Графічна залежність дальності польоту снаряда s від початкової швидкості V_0 при різних θ

На рис. 4 подано графічну залежність дальності польоту снаряда s від початкової швидкості V_0 при різних кутах θ . Крива 1 відповідає куту кидання снаряда $\theta = 45^\circ$, крива 2 - $\theta = 65^\circ$, крива 3 - $\theta = 130^\circ$, крива 4 - $\theta = 135^\circ$, крива 5 - $\theta = 170^\circ$. Як видно з цього рисунку, максимальна дальність s буде при куті стрільби $\theta = 45^\circ$ до площини горизонту, незалежно від того чи стріляємо на північ чи на південь, а кількісний вплив Коріолісової сили на дальність стрільби видно з табл. 1.

Таблиця 1

**Дальність польоту снаряда без врахування
Коріолісової сили (s_1) і з врахуванням
Коріолісової сили (s_2)**

$V_0, \text{м/с}$	100	300	500	700	900	1000	
45°	s_1	1019,3	9174,3	25484,1	49949	82568,5	101936
	s_2	1065,2	9314,3	25721	50284,7	83004,0	102421
65°	s_1	781,63	7034,7	19540,8	38300,0	63312,3	78163,4
	s_2	840,12	7211,34	19836,6	38715	63844,8	78753,4
105°	s_1	-508,04	-4572,39	-12701,1	-24894,1	-41151,4	-50804,2
	s_2	445,79	4384,97	12387,9	24455,6	40589,3	50181,4
135°	s_1	-1019,3	-9174,3	-25484,1	-49949	-82568,5	-101936
	s_2	972,67	9026,94	25226,5	49571,7	82062,7	101363
170°	s_1	-351,5	-3163,72	-8788,11	-17224,7	-28473,4	-35152,4
	s_2	337,3	3103,46	8657,96	17000,9	28132,3	34743,8

В табл. 1 подана дальність польоту снаряда із врахуванням Коріолісової сили і без її врахування. З табл. 1 видно, що дальність польоту снаряда є більшою з врахуванням Коріолісової сили в порівнянні з відповідною дальністю без її врахування. Числові дані показують, що при

стрільбі на південь, маємо протилежну ситуацію ніж при стрільбі на північ. Максимальна дальність буде при куті $\theta = 45^\circ$ і $\theta = 135^\circ$.

Таблиця 2

**Висота польоту снаряда без врахування
Коріолісової сили (H_1) і з врахуванням
Коріолісової сили (H_2)**

$V_0, \text{м/с}$	100	300	500	700	900	1000	
45°	H_1	255	2291	6376,3	12477	20625,8	25463,9
	H_2	254,6	2291,7	6375,9	12477	20625,7	25463,9
65°	H_1	418,4	3765,8	10460,7	20502,9	33892,6	41842,7
	H_2	418,4	3765,83	10460,6	20502,8	33892,4	41842,5
105°	H_1	475,8	4282	11894,5	23313,1	38538	47577,8
	H_2	475,7	4281,99	11894,4	23313	38537,9	47577,7
135°	H_1	255	2299	6376,3	12517	20691,5	25545,1
	H_2	255,4	2299	6376,2	12517	20691,5	25545,1
170°	H_1	15,6	140,7	390,8	766	1266,2	1563,2
	H_2	15,63	140,67	390,75	765,88	1266	1563

З табл. 2 видно, що максимальна висота польоту снаряда залежить від початкової швидкості V_0 і кута кидання снаряда θ , а при фіксованому куті θ значний вплив має його початкова швидкість із збільшенням якої зростає і висота.

Дані табл. 1 і табл. 2 показують, що врахування обертання Землі здійснює незначний вплив на максимальну висоту та дальність польоту снаряда в порівнянні, якби снаряд рухався без врахування Коріолісової сили. Варто зауважити, що числовий аналіз показав, що для України на дальність польоту снаряда більший вплив здійснює кут кидання θ і початкова швидкість снаряда V_0 , а не широта місцевості φ .

Висновки

На основі проведеного дослідження отримані аналітичні залежності руху снаряда із врахуванням впливу обертання Землі в меридіальній площині стрільби. Аналіз числових даних показав:

- широта місцевості φ , де знаходиться позиція стрільби, незначно впливає на відхилення δ ;
- при стрільбі на південь ($\theta < 90^\circ$) відхилення снаряда відбувається на захід і є більшим, в порівнянні, коли стріляють на північ ($180^\circ > \theta > 90^\circ$);
- Максимальним це відхилення буде при куті $\theta = 65^\circ$;
- при стрільбі на північ відхилення снаряда відбувається на схід і є максимальним при $\theta = 130^\circ$;
- мінімальне (близько 0) відхилення снаряда від траєкторії руху є при $\theta = 105^\circ$;
- збільшення початкової швидкості руху снаряда зумовлює збільшення відхилення δ ;

- врахування обертання Землі не значно впливає на максимальну висоту та дальність польоту снаряда.

Перспективним напрямом подальших досліджень є визначення впливу Кориолісової сили з врахуванням опору повітря на траєкторію руху снаряда.

Список літератури

1. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика : Учебник / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лисенко. – М.: Машиностроение, 2005. – 607 с.
2. Лысенко Л.Н. Баллистика ствольных систем. Справочная библиотека разработчика-исследователя / Л.Н. Лысенко, В.В. Грабин и др. – М.: Машиностроение, 2006. – 461 с.
3. Чернозубов А.Д. Внешняя баллистика / А.Д. Чернозубов, В.Д. Кириченко, И.И. Разин, К.В. Михайлов. – М.: Военная ордена Ленина и ордена Суворова

Артиллерийская инженерная академия имени Ф.Э. Дзержинского, Кн. 1, 1954. – 463 с.

4. Равдин И.Ф. Внешняя баллистика: Учеб. пособие / И.Ф. Равдин. – Ленинград : Военная артиллерийская командная академия, 1956. – 295 с.

5. Бургольц Н.Н. Основной курс теоретической механики / Н.Н. Бургольц. – М.: Наука, ч.1, 1972. – 468 с.

6. Геронимус Я.Л. Теоретическая механика (очерки об основных положениях) / Я.Л. Геронимус. – М.: Наука, 1973. – 512 с.

7. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1967. – 668 с.

Рецензент: д.фіз.-мат.н., проф. В.К. Опанасович, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів.

Влияние вращения Земли на параметры траектории движения объектов

О.В. Білаш

В работе проанализировано численно влияние Кориолисовой силы на параметры траектории движения снаряда, когда плоскость стрельбы совпадает с плоскостью меридиана. Все расчеты проводились с помощью математического пакета MAPLE. Построены графические зависимости, которые характеризуют: отклонение снаряда от плоскости стрельбы, его дальности. В статье показано незначительное влияние учета вращения Земли и широта местности на максимальную высоту полета снаряда. Определено, что эти отклонения имеют разное направление в зависимости от стрельбы (на север или восток) при одинаковых кутах и одинаковой начальной скорости снаряда. Анализ показал, что самым большим будет отклонение на запад при угле $\theta = 65^{\circ}$, на восток – при угле $\theta = 130^{\circ}$, а минимальное значение (около 0) будет при угле $\theta = 105^{\circ}$.

Ключевые слова: меридиальная плоскость стрельбы, Кориолисова сила, снаряд, уравнения движения, закон движения, дальность, высота, отклонения.

The rotation impact of the Earth on the parameters trajectory movement of the objects

O. Bilash

The quantitative impact of Coriolis forces on parameters of trajectory movement when shooting plane coincides with the plane of the meridian was calculated in the work. All calculations were carried out using mathematical package MAPLE. The main factors that influence on the trajectory of motion to the movement were determined. Graphic dependences that characterize projectile deviation from the plane shooting and his range were constructed. In article insignificant effect taking into account the Earth's rotation and breadth of locality on the maximum height of shell flights was showed. This deflection is different when firing (to the south or to the north) at the same corner and with the same initial velocity of shell was defined. Analysis shows that the largest deviation will be at an angle $\theta = 65^{\circ}$, and to the north - at an angle $\theta = 130^{\circ}$. The minimal deviation (about 0) will be at an angle $\theta = 105^{\circ}$.

Keywords: meridianal plane shooting, Coriolis force, shell, equations of motion, the law of motion, distance, height, deflection.