

УДК 629.017

М.О. Івасюк, М.Б. Сокіл

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

ВПЛИВ ДИНАМІКИ КАНАТУ НА ЧАСТОТУ ЙОГО ВЛАСНИХ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ В ХОДІ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ РОБІТ

Вантажопідйомні засоби широко застосовуються у Збройних Силах України під час переміщення вантажів, у тому числі і вибухонебезпечних. Найбільшого розповсюдження у військах дістали автомобільні стрілові крани різних вантажопідйомностей, які повинні відповідати вимогам безпеки при переміщенні категорійних (вибухонебезпечних) вантажів. Основною небезпекою, як показує досвід, є надмірне коливання небезпечних вантажів, що може призвести до виникнення аварій при проведенні навантажувально-розвантажувальних робіт. Дана робота присвячена математичному опису основних характеристик коливання канату з вантажем під час його піднімання та опускання з метою забезпечення безпеки виконання робіт.

Ключові слова: *поперечні коливання канату, підіймання вантажу, транспортування небезпечних вантажів.*

Постановка проблеми

Гнучкі канати широко використовуються у машинах неперервної дії (шахтних витягах, канатних дорогах), а також у різних типах кранів. З одного боку, як у першого, так і другого типів машин канати характеризуються сталою чи змінною швидкістю поздовжнього руху, з іншого – якщо у більшості машин неперервної дії віддаль між характерними точками канатних ліній є незмінною величиною, то для гнучких канатів кранових установок під час опускання чи підняття вантажу віддаль між точкою підвішування вантажу до канату та точкою його контакту із верхнім блоком є змінною величиною. Останнє значною мірою ускладнює аналітичне дослідження динамічних явищ, які супроводжують процес переміщення вантажу. Математично першого чи другого типу системи описуються однакою класу диференціальними рівняннями із частинними похідними гіперболічного типу. Ці рівняння містять мішану похідну за лінійною та часовою змінними. Вказана величина, яка враховує рух канату, створює значні труднощі під час інтегрування рівняння коливань канату.

Аналіз останніх досліджень

Що стосується крайових умов, то для першого випадку вони є більш простими і для багатьох випадків вони описуються класичними співвідношеннями. Як наслідок вказаного, методики дослідження коливань гнучких елементів, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху, отримала розвиток у низці робіт [1-4]. Вона базується на основних ідеях хвильової теорії руху [5, 6].

Крайові умови другого типу задач є більш складними, а самі задачі можна віднести до так

званих крайових задач із рухомими кінцями. Такі задачі, в кращому випадку, за спрощених математичних моделей коливань канату із вантажем розглядалися аналітично тільки в окремих роботах. У них не повною мірою ураховано, наприклад, швидкість підняття вантажу. Використання ж для них чисельних методів дослідження не може бути базою для прогнозування, наприклад, резонансних явищ, вибору оптимальних режимів руху вантажу та ін. Саме тому метою даної роботи є поширення, хоча і за певних обмежень, основних ідей робіт [3,4] на випадок поперечних коливань гнучких канатів, які переміщують у вертикальній площині вантаж. Звідси і випливає актуальність дослідження.

Постановка задачі. Математична модель об'єкта дослідження

Важкий однорідний гнучкий канат піднімає (чи опускає) вантаж вагою P . Визначити основні характеристики коливань канату, якщо маса його одиниці довжини m_0 , а швидкість руху в довільний момент часу V . Згинною жорсткістю канату знехтувати. Для розв'язання поставленої задачі необхідно перш за все отримати математичну модель коливань досліджуваного об'єкта. Для цього динамічну рівновагу умовно виділеного елемента канату довжиною dx . Сили, які діють на нього, вказані на рис. 1б): S – сила натягу канату у перерізі із координатою x , $S + dS$ – сила натягу у перерізі із координатою $x + dx$; θ та $\theta + d\theta$ – відповідно кути між дотичною до центральної осі та вертикаллю, які проведені на початку та в кінці виділеного елемента; $dm = m_0 dx$ – маса виділеного елемента, $u(x, t)$ – відхилення від рівноважного (вертикального)

положення центру ваги виділеного елемента. Із урахуванням того, що до кінця канату підвішено вантаж, величина зусилля S у довільному його перерізі визначається залежністю $S = P + m_0 g(l - x)$, в якій l – довжина частини канату, яка провисає. У випадку, коли коливання канату із вантажем відбуваються у незмінній вертикальній площині, прискорення центру виділеного елемента рівне $\frac{d^2 u(x,t)}{dt^2}$. Наведене у сукупності дозволяє диференціальне рівняння коливань канату, до якого приєднаний вантаж, подати у вигляді

$$dm \frac{d^2 u(x,t)}{dt^2} = -S \sin \theta + (S + dS) \sin(\theta + d\theta). \quad (1)$$

У роботі розглядаються малі коливання канату із вантажем. Це дозволяє замінити $\sin \theta$ у наведеному співвідношенні величиною $\frac{\partial u}{\partial x}$. Таким чином, із (1), враховуючи наведене, диференціальне рівняння поперечних коливань канату із вантажем трансформується до вигляду

$$\frac{d^2 u(x,t)}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{mg}{m_0} + g(l-x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = 0. \quad (2)$$

Примітка. У роботі розглядаються власні вертикальні коливання канату за умови, що зовнішні сили опору відсутні або вони є настільки малими, що ними можна знехтувати при дослідженні поперечних коливань канату.

Для описання коливань об'єктів, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху диференціальні рівняння більш зручно подавати у змінних Ейлера [6]. Формально вважаючи x такою координатою, символи похідних $\frac{d}{dt}$ та $\frac{d^2}{dt^2}$ у випадку сталої за величиною швидкості руху вантажу набувають вигляду

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Таким чином, диференціальне рівняння поперечних коливань канату, який на нижньому кінці несе вантаж, приймає вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{mg}{m_0} + g(l-x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Як відомо, динамічний процес систем із розподіленими параметрами (саме до такого класу систем належить досліджуваний об'єкт) визначається не тільки діючими силами, але й крайовими та початковими умовами. Щодо перших, то у змінних Ейлера для точки контакту канату до блока вона приймає вигляд $u(x,t)|_{x=0} = 0$ (горизонтальне переміщення точки дотику канату до блока відсутнє). Більш складного вигляду є крайова

умова на другому кінці канату. Для її описання запишемо “динамічну рівновагу” точки приєднання вантажу до канату

$$\bar{\Phi} + \bar{P} + \bar{S}|_{x=l} = 0 \quad (5)$$

де $\bar{\Phi}$ – сила інерції вантажу, тобто $\Phi = \frac{P}{g} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} |_{x=l}$.

Співвідношення (5) із урахуванням прийнятих вище обмежень набуває вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} |_{x=l} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} |_{x=l}. \quad (6)$$

Мета статті

Задача полягає у побудові наближеного аналітичного розв'язку диференціального рівняння (4) за наведених вище крайових умов у формі зручній для аналізу впливу всієї множини параметрів на динамічний процес.

Виклад основного матеріалу. Методика розв'язування

Побудувати точний розв'язок сформульованої крайової задачі не вдається через наступні математичні труднощі: а) рівняння (4) містить мішану похідну за лінійною та часовою змінними, а отже, для його інтегрування не можна застосувати класичний метод Фур'є [6]; б) коефіцієнти при старших похідних шуканої функції є змінними; в) крайові умови неklasичного типу (мова йде про крайову умову (6)). У зв'язку із наведеним будемо вважати, що швидкість піднімання вантажу є обмеженою. Саме технічні умови транспортування небезпечних вантажів вимагають даного обмеження. Наведене дозволяє рівняння (4) представити у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - g l \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -2V \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} - \\ & - V^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - g(l-x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (7)$$

За наведеного обмеження можна вважати: а) максимальне значення правої частини є малою величиною у порівнянні із максимальним значенням доданку $g l \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, б) частина канату, яка провисає, є повільно змінною функцією часу, а значить, параметр l змінюється відповідно до закону $l(\tau) = l_0 - V\tau$, $V\tau = \tau$. У сукупності наведене дозволяє для побудови розв'язку поставленої задачі використати загальні ідеї методів збурень [7]. Останні рекомендують перш за все побудувати розв'язок незбуреної крайової задачі. У нашому випадку це розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} - g l \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

за крайових умов

$$u_0(x,t)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} |_{x=l} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} |_{x=l}. \quad (9)$$

Використовуючи принцип одночастотності коливань у механічних системах складної структури, одночастотний розв'язок крайової задачі (8), (9) подамо у вигляді

$$u_0(x,t) = a \cos(\kappa(\tau)x + \omega(\tau)t + \varphi) + b \cos(\kappa(\tau)x - \omega(\tau)t + \psi) \quad (10)$$

де $a, b, \kappa(\tau)$ амплітуди та хвильові числа прямої та відбитої хвиль, $\omega(\tau), \varphi, \psi$ – їх частота та початкові фази.

Співвідношення (8) буде задовольняти у першому наближенні рівняння (8), якщо має місце дисперсійне співвідношення

$$\omega^2(\tau) - g l(\tau) \kappa^2(\tau) = 0. \quad (11)$$

До того ж воно буде задовольняти крайовій умові початку канату, якщо $a = -b, \varphi = -\psi$, а на кінці – якщо має місце тотожність

$$\begin{aligned} a \kappa(\tau) \sin(\kappa(\tau)l(\tau) + \omega(\tau)t + \varphi) - a \kappa(\tau) \sin(\kappa(\tau)l(\tau) - \omega(\tau)t - \varphi) &\equiv \\ \equiv \frac{\omega^2(\tau)}{g} (a \cos(\kappa(\tau)l(\tau) + \omega(\tau)t + \varphi) - a \cos(\kappa(\tau)l(\tau) - \omega(\tau)t - \varphi)) &\quad (12) \end{aligned}$$

Наведена тотожність еквівалентна рівнянню

$$\operatorname{tg} \kappa(\tau) l(\tau) = \frac{\kappa(\tau) g}{\omega^2(\tau)}. \quad (13)$$

Дисперсійне співвідношення (11) разом із отриманою вище залежністю (13) служить базою для визначення хвильового числа $\kappa(\tau)$

$$\operatorname{tg}(\kappa(\tau) l(\tau)) = \frac{1}{l(\tau) \kappa(\tau)}. \quad (14)$$

Отримати його для заданих параметрів системи можна графічно, чисельним чи іншими методами. Нижче зупинимось на наближеному аналітичному знаходженні залежності хвильового числа, а значить, першої основної частоти від довжини частини нитки, яка провисає. Для цього розкладемо праву частину рівняння (14) у ряд, обмежившись у ньому лише двома членами розкладу. Після нескладних перетворень отримуємо

$$\kappa(\tau) = \frac{1}{l(\tau)} \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{21}}{2}} \approx \frac{0,8795}{l(\tau)}. \quad (15)$$

Отримане значення хвильового числа дає можливість виходячи із дисперсійного співвідношення отримати першу основну частоту коливань канату із вантажем, що піднімається, у вигляді

$$\omega(\tau) = \sqrt{g l(\tau)} \kappa(\tau) = 0,8795 \sqrt{\frac{g}{l(\tau)}} = 0,8795 \sqrt{\frac{g}{l_0 - Vt}}. \quad (16)$$

Як і слід було чекати, окремим випадком отриманої залежності є перша основна частота коливань канату із вантажем на кінці, за умови, що останній не піднімається. Для більш точного визначення шуканої величини знайдемо так зване

перше асимптотичне наближення частоти [8]. Воно буде враховувати вплив правої частини рівняння (7) на динаміку процесу і визначається залежністю

$$\Omega(\tau) = \omega(\tau) + \frac{1}{\omega(\tau) l} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[-2V \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} - V^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - g(l-x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]_{u(x,t)=u_0(x,t)} dx dt \times$$

$$\times \sin \kappa x \sin \Psi dx dt \Psi,$$

де $\Psi = \omega(\tau)t + \varphi$.

Якщо врахувати вигляд першого наближення, то отримаємо співвідношення для визначення частоти власних коливань канату у вигляді

$$\Omega(\tau) = \omega(\tau) - \frac{4\kappa(\tau)(V^2 + g l(\tau)) \left(4\kappa(\tau) l(\tau) - 8 \sin \frac{\kappa l}{4} \right) - g \kappa(\tau) l(\tau) (1 - 2 \cos 2\kappa l) - g (\sin 2\kappa l - 2\kappa(\tau) l(\tau) \cos 2\kappa l)}{8\omega(\tau) l(\tau)} \quad (18)$$

В останньому співвідношенні $\kappa(\tau)$ та $\omega(\tau)$ визначаються відповідно залежностями (15) та (16). Це дає змогу уточнене значення частоти поперечних коливань канату із вантажем, який піднімається, зі сталою швидкістю V подати у вигляді

$$\Omega(\tau) = 0,8795 \sqrt{\frac{g}{l_0 - Vt}} - 1,7525 \frac{V^2}{(l_0 - Vt) \sqrt{g(l_0 - Vt)}} + 0,1547 \sqrt{\frac{g}{l_0 - Vt}} \quad (19)$$

Отримані розрахункові залежності легко трансформувати на випадок опускання вантажу, і власна частота у вказаному випадку набуває значення

$$\begin{aligned} \Omega(\tau) = 0,8795 \sqrt{\frac{g}{l_0 + Vt}} - 1,7525 \frac{V^2}{(l_0 + Vt) \sqrt{g(l_0 + Vt)}} + \\ + 0,1547 \sqrt{\frac{g}{l_0 + Vt}}. \quad (20) \end{aligned}$$

На рис.1 надано закон зміни частоти коливань канату із вантажем за різних швидкостей підняття а), б) та опускання в), г) вантажу.

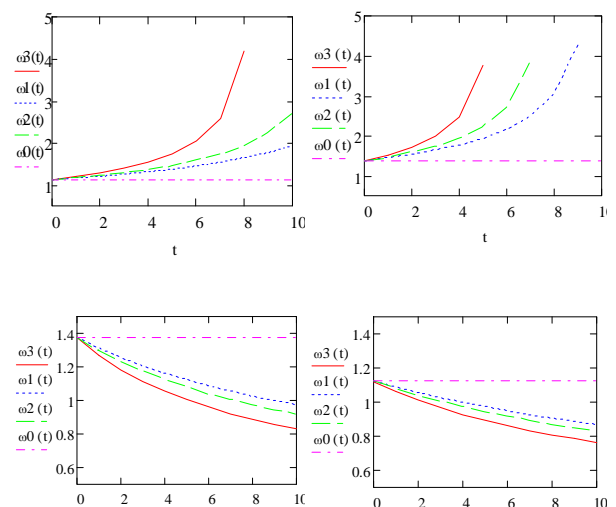


Рис. 1. Закони зміни в часі частоти власних коливань канату під час підняття (опускання) вантажу

Отримані аналітичні та побудовані на їх базі графічні залежності показують, що під час підймання вантажу з малою швидкістю власна частота коливань вантажу зростає, а під час опускання – спадає.

Висновки

Розроблена у роботі методика дозволяє визначити вплив швидкості руху та довжини канату на власну частоту коливань. Отримані на її базі результати показують, що: для більших швидкостей підймання вантажу власна частота коливань канату з часом зростає; для більшої початкової довжини канату швидкість зростання частоти коливань є меншою. Для повільного опускання вантажу власна частота коливань із часом спадає.

Розроблена у роботі методика може бути базою для вирішення більш складної задачі – визначення впливу зовнішнього періодичного збурення на коливання канату із вантажем.

Список літератури

1. S. Ponomareva. W.T. On applying the Laplace transform method to an equation describing an axially moving string / S. Ponomareva. W.T., van Horsen // Proc. Appl. Math. Mech.-2004 № 4. – p.107–108.

2. Chen L. Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings / L. Q. Chen // Appl. Mech. Rev. – 2005.– Volume 58.2. – P. 91–116.

3. Сокіл М.Б. Згинні коливання гнучких елементів систем приводів і структура розв'язку їх математичних моделей / М.Б. Сокіл // Вісник НЛТУ України. – 2012. – Вип. 22.1. – С. 144-147.

4. Харченко Є.В. Вимушені коливання рухомих середовищ і асимптотичний метод у їх дослідженні / Є.В. Харченко, М.Б. Сокіл // Збірник науково-технічних праць “Науковий вісник НЛТУ України”. – Львів: УкрДЛТУ – 2006. – Вип. 16.1. – С. 134-139.

5. Савін Г.М. Про позовжені коливання пружно-в'язкої нитки змінної довжини з вантажем на кінці (опускання вантажу) / Г.М. Савін, В.М. Шевело, А.І. Кужій // Прикладна механіка – 1966. – Т.3, вип.3. – С.84-99.

6. Шкіль М.І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях / М.І. Шкіль – Київ; ВШ – 1971. – 228 с.

7. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков – М.: ВШ – 712 с.

8. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул – М.: Мир, – 1972. – 272 с.

9. Митропольский Ю.А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеев – К: Вища школа. – 1976. – 592 с.

Рецензент: к.т.н., с.н.с. В.І. Кривцун, Національна академія сухопутних військ, Львів.

ВЛИЯНИЕ ДИНАМИКИ КАНАТА НА ЧАСТОТУ ЕГО СОБСТВЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ХОДЕ ГРУЗОПОДЪЕМНЫХ РАБОТ

М.А. Ивасюк, М.Б. Сокил

Грузоподъемные средства широко применяются в Вооруженных Силах Украины при перемещении грузов, в том числе и взрывоопасных. Наибольшее распространение в войсках получили автомобильные стреловые краны различных грузоподъемностей, которые должны отвечать требованиям безопасности при перемещении категоризованных (взрывоопасных) грузов. Основную опасность, как показывает опыт, представляют чрезмерные колебания категоризованных грузов, что может привести к возникновению аварий при проведении погрузочно-разгрузочных работ. Данная работа посвящена математическому описанию основных характеристик колебаний каната с грузом при его подъеме и опускании с целью обеспечения безопасности выполнения задач.

Ключевые слова: поперечные колебания каната, поднимание груза, транспортирование опасных грузов.

THE IMPACT OF THE DYNAMICS OF THE ROPE TO THE FREQUENCY OF ITS OWN TRANSVERSE OSCILLATIONS DURING LIFTING OPERATIONS

M. Ivasuk, M. Sokil

Lifting tools are widely used in the Armed Forces of Ukraine during the movement of goods, including hazardous. The greatest distribution in the armed forces received road jib cranes various wantagate that must meet safety requirements when moving category (explosive) loads. The main danger, as experience shows, is the excessive fluctuation of dangerous goods that may cause accidents when carrying out loading and unloading operations. This work is devoted to mathematical description of the main characteristics of the oscillations of the rope with the cargo during its lifting and lowering to ensure the safety of work performance.

Key words: transverse vibrations of a rope, cargo lift, transportation of dangerous goods.