РОЗРОБЛЕННЯ ТА МОДЕРНІЗАЦІЯ ОВТ

УДК 623.546

С.В. Бондаренко, Ю.М. Косовцов, В.І. Грабчак

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

ВИЗНАЧЕННЯ АПРОКСИМУЮЧИХ ФУНКЦІЙ ОПОРУ ПОВІТРЯ РУХУ СНАРЯДА, НЕЛІНІЙНИХ ВІДНОСНО ПАРАМЕТРІВ, ЩО ОЦІНЮЮТЬСЯ

У статті розглянутий підхід визначення апроксимуючих функцій опору повітря, нелінійних відносно параметрів, що оцінюються, який побудований на точних (прямих) методах рішення системи лінійних рівнянь, що дозволяє використовувати метод найменших квадратів для визначення параметрів апроксимуючої функції.

Ключові слова: *апроксимація, функція опору повітря, метод найменших квадратів, функція Гаусса, поліном другого ступеня, система алгебраїчних рівнянь.*

Вступ

Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури. Для розрахунку Таблиць стрільби артилерійських систем, визначення установок для ведення стрільби за допомогою так званих "мобільних калькуляторів" необхідно багаторазово вирішувати систему диференціальних рівнянь просторового руху снарядів при заданих початкових умовах стрільби, для ефективної роботи яких необхідно мати аналітичний опис функцій опору повітря, які неперервно залежать від швидкості польоту снаряда [1-3]. Крім того, накладаються обмеження щодо обсягу інформації, швидкодії та точності її оброблення [1, 4, 5].

Перспективним напрямом досліджень є підхід, який заснований на апроксимації табличних даних опору повітря єдиною аналітичною функцією у вигляді неперервної функції швидкості в межах всього діапазону її зміни та забезпечення найкращого її наближення до табличних даних [1, 4, 6]. Аналітичні функції, які використовуються для апроксимації, являють собою нелінійні функції, які можна поділити на два типи: нелінійні відносно включених в аналіз пояснюючих змінних, але лінійних по параметрах, що оцінюються, та функції нелінійні відносно цих параметрів.

Перший тип функцій може бути приведений до лінійного виду за допомогою заміни змінних, суть якого полягає в заміні нелінійних змінних новими лінійними змінними, внаслідок чого нелінійна функція зводиться до лінійної. Так, від нелінійної функції – рівностороння гіпербола

$$\bar{c}_X = a + b/x, \tag{1}$$

де a і b – невизначені параметри, шляхом введення заміни $z = 1/x$ до (1) отримаємо лінійну функцію

$$\bar{c}_X = a + b \cdot z. \tag{2}$$

Функції нелінійні відносно параметрів, що оцінюються, в свою чергу поділяються на:
- нелінійні функції внутрішньо лінійні;
- нелінійні функції внутрішньо нелінійні.

Якщо нелінійна модель внутрішньо лінійна, то вона за допомогою відповідних перетворень може бути приведена до лінійного виду, наприклад, логарифмуванням [8, 9]. Так, шляхом логарифмічних перетворень можна перейти від експоненціальної залежності до лінійної:

$$\bar{c}_X = a\exp(bx);$$
$$\ln\bar{c}_X = \ln a + bx, \tag{3}$$

Роблячи у (3) заміну $\ln\bar{c}_X = Z$ і $\ln a = A$, отримаємо

$$Z = A + bx. \tag{4}$$

У результаті виконаної заміни отримаємо кінцевий вид експоненціальної функції, приведеної до лінійної форми.

Отже, зазначені методи визначення апроксимуючої функції опору повітря, нелінійної відносно коефіцієнтів, що оцінюються, ґрунтуються на тому, що апроксимуюча функція за допомогою заміни змінних та логарифмічних перетворень може бути приведена до лінійного виду, що дозволяє використовувати МНК для визначення коефіцієнтів апроксимуючої функції сили опору повітря.

У роботі [7] в якості апроксимуючої функції запропоновано використовувати неперервно-диференційовану на відрізку зміни швидкості польоту снаряда аналітичну функцію як суму опорної функції (функції помилок) та основного набору апроксимуючих функцій (набору функцій Гаусса), варіація числових параметрів яких дозволяє корегувати наближення форми кривої апроксимуючої функції до значень функції опору повітря на заданому відрізку швидкості польоту снаряда, а також локально її модифікувати.

Недоліком лінеаризації функцій за допомогою перетворень функцій (2) і (4) є те, що вони не дозволяють для певного виду апроксимуючих функції опору повітря (функції помилок та функцій Гаусса), нелінійних відносно коефіцієнтів, що оцінюються, після заміни змінних чи логарифмічних перетворень отримати функції лінійного виду, такі функції є внутрішньо нелінійними функціями, до яких неможливо застосувати класичний МНК [9, 10]. В цьому випадку для оцінки параметрів внутрішньо нелінійної апроксимуючої функції використовуються ітераційні процедури, ефективність застосування яких залежить від виду функції та особливостей використання ітераційного підходу.

Метою статті є розробка нових підходів до визначення параметрів апроксимуючих функцій опору повітря руху снаряда, нелінійних відносно параметрів, що оцінюються.

Основна частина

1. Аналіз існуючих підходів до визначення апроксимуючих функцій опору повітря, нелінійних відносно параметрів, що оцінюються. Нехай задані дискретні значення функції опору повітря

$$\{(c_{X0}, v_0), (c_{X1}, v_1), ..., (c_{Xn}, v_n)\}; \qquad (5)$$

задана внутрішньо нелінійна апроксимуюча функція $\bar{c}_X(v_j, c_j)$, яка залежить від параметрів $c_j = (c_0, c_1, ..., c_n)$ і вільної змінної v_j.

Відповідно до МНК, параметри апроксимуючої функції визначаються так, щоб сума квадратів різностей значень c_x, які отримані з таблиці, і значеннями апроксимованої функції $\bar{c}_X(v)$ була б найменшою на заданій системі точок, тобто

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \to \min,$$

де $e_i = [\bar{c}_{X_i}(v) - c_{X_i}]$; $i = \overline{1,n}$; n – кількість дискретних значень функції опору повітря.

Для знаходження мінімуму функції S, прирівнюються до нуля її перші часткові похідні по параметрах c_j

$$\frac{\partial S}{\partial c_j} = 2\sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial e_i}{\partial c_j} = 0, \qquad (6)$$

де $j = \overline{1,m}$; m – кількість коефіцієнтів, що оцінюються.

Так як функція S в загальному випадку не має єдиного мінімуму, то призначається початкове значення вектора параметрів c_{0_j} і наближається до оптимального вектора за кроками

$$c_j \approx c_j^{k+1} = c_j^k + \Delta c_j,$$

де k – номер ітерації; Δc_j – вектор кроку.

На кожному кроці ітерації проводиться лінеаризація функції за допомогою наближення рядом Тейлора відносно параметрів c_j^k. Тут елемент матриці Якобі J_{ij} – функція параметра c_j; значення вільної змінної v_j фіксовано.

В термінах лінеаризованої функції

$$\frac{\partial e_i}{\partial c_j} = -J_{ij},$$

і залишки визначені як

$$e_i = \Delta c_{X_i} - \sum_{j=1}^{m} J_{ij} \Delta c_j; \; \Delta c_{X_i} = c_{X_i} - \bar{c}_X(v_i, c_j^k). \qquad (7)$$

Підставляючи вираз (7) до (6), отримаємо

$$-2\sum_{j=1}^{m} J_{ij} \left(\Delta c_{X_i} - \sum_{i=1}^{n} J_{ij} \Delta c_j \right) = 0. \qquad (8)$$

Перетворюючи (8), отримаємо систему з n лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} J_{ij} J_{ij} \Delta c_j = \sum_{j=1}^{m} J_{ij} \Delta \bar{c}_{X_i}(v).$$

Зазначені процедури вирішуються ітераційними методами, найбільш розповсюдженими для оцінки параметрів внутрішньо нелінійної апроксимуючої функції є методи спряжених градієнтів, Ньютона-Гаусса та Левенберга-Марквардта [9-11].

В методі спряжених градієнтів використовується інформація тільки про лінійну частину приросту в точці. При цьому метод спряжених градієнтів дозволяє вирішувати квадратичні задачі за кінцеве число кроків. Збіжність методу суттєво залежить від того, наскільки точно вирішується задача одномірної оптимізації, можливі зациклювання методу, усуваються за допомогою оновлень. Тим не менш, якщо метод попадає в локальний мінімум функції, дуже велика ймовірність, що йому не вдасться з нього вибратися.

Метод Ньютона-Гаусса – це ітераційний чисельний метод знаходження рішення задачі найменших квадратів та є різновидом методу Ньютона. В загальному вигляді метод використовує матрицю Якобі похідних першого порядку апроксимуючої функції, для знаходження вектора значень параметрів, який мінімізує остаточні суми квадратів (суму квадратних відхилень прогнозованих значень від тих, що спостерігаються). В стандартному методі Ньютона на кожній ітерації потрібно обчислення та обертання матриці Гесса, що часто є достатньо складним процесом. В методі Ньютона-Гаусса подібна необхідність відпадає, причому швидкість збіжності може досягати квадратичної залежності, хоча другі похідні і не враховуються. В той же час в методі Ньютона-Гаусса часто зустрічається ряд проблем в ситуації, коли член другого порядку значний за своєю величиною, що призводить до некоректної роботи та повільної збіжності, а в деяких випадках і до розбіжності.

Удосконаленою версією метода є так званий метод Левенберга-Марквардта, який заснований на евристичних міркуваннях. Передбачається, що в якості критерію оптимізації використовується середньо-квадратична похибка моделі на виборці, що навчається. Метод полягає в послідовному наближенні заданих початкових значень до локального оптимуму. Метод відрізняється від методу спряжених градієнтів тим, що використовує матрицю Якобі, а не градієнт вектора параметрів; від методу Ньютона-Гаусса тим, що використовує параметр регуляризації.

Недоліком зазначених методів є те, що вони передбачають застосування чисельних методів, що призводить до накопичення похибок, некоректної роботи та можливої розбіжності ітераційного процесу, який не дозволяє досягнути шуканого результату.

2. Визначення параметрів апроксимуючих функцій опору повітря, нелінійних відносно коефіцієнтів, що оцінюються. В роботі [7] в якості аналітичних функцій, які використовуються для апроксимації табличних даних функцій опору повітря, запропоновано використовувати суму

$$\bar{c}_X(v) = A_0 + \sum_{j=1}^{N} p_j\,, \tag{9}$$

опорної функції A_0 та основного набору апроксимуючих функцій $\sum_{j=1}^{N} p_j$, які базуються на функції помилок $b_0 erf\left[k_0(v-\xi_0)\right]$ та функції Гаусса $c\,exp\left[-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, де b_0, k_0, ξ_0, c, σ, μ – числові параметри (масштабні коефіцієнти), при визначеному виборі яких апроксимуюча функція (9) прийме вид кривої, що якісно співпадає з кривою функції опору повітря, яка апроксимується.

Для узагальнення процедур визначення апроксимуючих функцій опору повітря, нелінійних відносно параметрів, що оцінюються, та враховуючи, що:

- похідна функції помилок є експоненціальна функція

$$\frac{d}{dv} erf(v) = b_0 \exp\left[-k_0(v-\xi_0)^2\right], \tag{10}$$

- функція Гаусса є теж експоненціальною функцією, яку можна привести до виду

$$c\exp\left[-\lambda(v-\mu)^2\right], \tag{11}$$

де $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$, визначення параметрів апроксимуючих функцій опору повітря (9), розглянемо на прикладі функції помилок.

Дослідження функціональної залежності (10) будемо здійснювати з використанням сукупності емпіричних даних, які встановлюють зв'язок між величинами c_X та швидкістю v, розміщених у вигляді таблиці, причому вони слугуватимуть вихідними даними для визначення параметрів b_0, k_0, ξ_0 у співвідношенні (10), а також тестовими даними.

Послідовність визначення параметрів функції помилок представимо у наступній послідовності:

1. Формування масиву значень логарифмів табличної функції опору повітря

$$c_X^{ln}(v) = ln\, I_i\;, \tag{12}$$

де $I_i = \left\{(c_{X0}, v_0), (c_{X1}, v_1), ..., (c_{Xn}, v_n)\right\}$ – масив табличних даних функції опору повітря.

2. Логарифмування виразу (10) за натуральною основою та формування за отриманим виразом полінома 2-го степеня відносно змінної v

$$\begin{aligned} ln\left(c_{X_i}^{exp}\right) &= ln\, b_0 - k_0(v-\xi_0)^2 = \\ &= ln\, b_0 - k_0\xi_0{}^2 + 2k_0\xi_0 v - k_0 v^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Отриманий вираз (13) надамо у вигляді полінома другого степеня відносно змінної v

$$P_1(v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2\,, \tag{14}$$

де a_0, a_1, a_2 – коефіцієнти, які мають значення:

$$\begin{aligned} &ln\, b_0 - k_0\xi_0{}^2 = a_0; \\ &2k_0\xi_0 = a_1; \\ &k_0 = a_2. \end{aligned} \tag{15}$$

3. Апроксимація прологарифмованих табличних значень функції опору повітря (12) степеневим поліномом та визначення його параметрів.

Для апроксимації прологарифмованих табличних значень функції опору повітря використаємо степеневий поліном 2-го степеня

$$P_2(v) = q_0 + q_1 v + q_2 v^2\,, \tag{16}$$

де q_0, q_1, q_0 – невідомі коефіцієнти.

Для рішення цієї задачі скористуємося МНК, розраховуємо коефіцієнти q_0, q_1, q_0, так щоб сума квадратів різностей значень c_X, які отримані з таблиці, і значеннями апроксимованої функції $P_2(v)$ була б найменшою на заданій системі точок

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left[P_2(v) - c_{X_i}^{ln}\right]^2 = \\ = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(q_0 + q_1 v + q_2 v^2\right) - c_{X_i}^{ln}\right]^2 \to min. \qquad (17)$$

4. Формування системи лінійних рівнянь та розрахунок параметрів функції Гаусса.

Для визначення параметрів апроксимуючих функцій опору повітря, нелінійних відносно коефіцієнтів, що оцінюються, прирівняємо невідомі коефіцієнти полінома $P_1(v)$ (14) та відомі (розраховані МНК) коефіцієнти полінома $P_2(v)$, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно трьох невідомих параметрів функції помилок b_0, k_0, ξ_0

$$\begin{cases} a_0 = q_0; \\ a_1 = q_1; \\ a_2 = q_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ln\, b_0 - k_0 \xi_0^2 = q_0; \\ 2k_0\xi_0 = q_1; \\ k_0 = q_2, \end{cases}$$

вирішуючи яку отримаємо параметри b_0, k_0, ξ_0 апроксимуючої функції $b_0 \exp\left[-k_0(v - \xi_0)^2\right]$.

Загальний підхід до визначення параметрів апроксимуючих функцій опору повітря, нелінійних відносно коефіцієнтів, що оцінюються, наведена на рис.

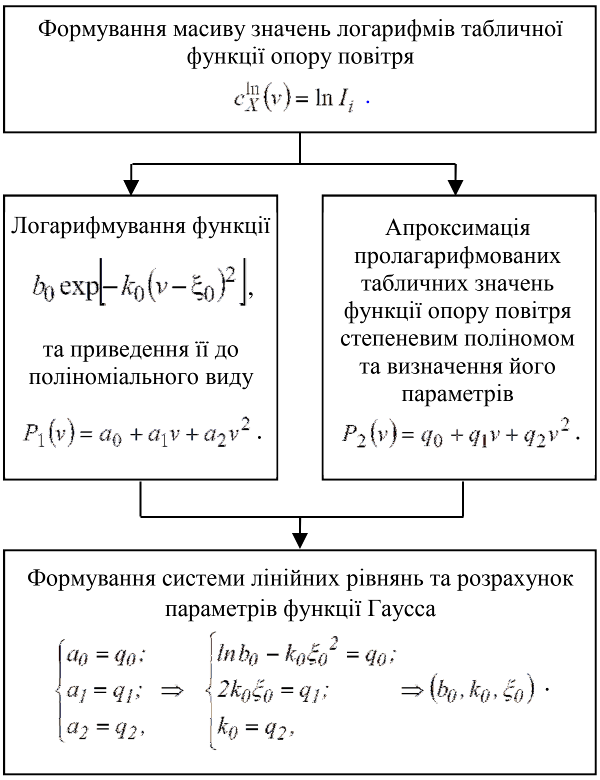

Рис. **Схема визначення параметрів апроксимуючих функцій опору повітря, нелінійних відносно коефіцієнтів, що оцінюються**

Висновки

Перспективним напрямом подання табличних даних функції опору повітря є підхід, який заснований на апроксимація даних аналітичними функціями, вимогою до якого є можливість отримання єдиної функції опору повітря у вигляді неперервної функції швидкості в межах всього діапазону її зміни та забезпечення найкращого її наближення до табличних даних. В якості аналітичної функції запропоновано використовувати неперервно-диференційовану на відрізку зміни швидкості польоту снаряда аналітичну функцію як суму опорної функції (функції помилок) та основного набору апроксимуючих функцій (набору функцій Гаусса), які є нелінійними відносно параметрів, що оцінюються.

В статті розглянутий підхід визначення апроксимуючої функції – функції помилок, нелінійної відносно параметрів, що оцінюються. Наведена та математично обґрунтована послідовність виконання процедур визначення нелінійних параметрів, що в підсумку зводиться до прямих методів рішення системи лінійних рівнянь, що дозволяє використовувати МНК для визначення параметрів апроксимуючої функції опору повітря.

Подальшим напрямом досліджень є практичне їх застосування при апроксимації еталонних функцій опору, функцій еталонів форм снарядів та індивідуальних снарядів, що надані в табличній формі; оцінка їх точностних показників.

Список літератури

1. *Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лисенко. – М.: Машиностроение, 2005. – 607 с.*

2. *Лисенко В.М. Теорія польоту / В.М. Лисенко, В.І. Грабчак, Д.А. Новак. – Суми: СумДУ, 2006. – 203 с.*

3. *Подготовка стрельбы и управления огнем артиллерии. – М.: Воениздат, 1987. – 376 с.*

4. *Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М: Наука, 1978. – 512 с.*

5. *Ефремов А.К. Аппроксимация закона сопротивления воздуха 1943 г. / А.К. Ефремов. – Наука и образование. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2013. – Вып. 10. – С. 269-282.*

6. *Грабчак В.І. Аналіз існуючих та перспективних методів визначення сили опору повітря руху снарядів / В.І. Грабчак, С.В. Бондаренко. – Військово-технічний збірник. – Львів: АСВ. – 2013. – Вип. 2. (9). – С. 13-19.*

7. *Грабчак В.І. Апроксимація сили опору повітря руху снарядів аналітичними функціями / В.І. Грабчак, Ю.М. Косовцов, С.В. Бондаренко. – Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. Науковий журнал. – К.: НУОУ. – 2014. – Вип. 1(19). – С. 19-23.*

8. *Dates D.M., Watts D.G. Nonliner regression analesis and its applicatijns / D.M. Dates, D.G.Watts. – Wiley, 1988. – 365 p.*

9. *Демиденко Е.З. Линейные и нелинейные регрессии / Е.З. Демиденко. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 304 с.*

10. *Бард Й. Нелинейное оценивание параметров / Й.Бард. – М.: Статистика, 1979. – 349 с.*

11. *Chavent G. Njnlinear Least Squares for Inverse Problems / G. Chavent. – Heidelberg, Springer, 2009. – 375 p.*

Рецензент: д.т.н., доц. П.І. Ванкевич, Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів.

Определение аппроксимирующих функций сопротивления воздуха движению снаряда, нелинейных относительно оцениваемых параметров

С.В. Бондаренко, Ю.Н. Косовцов, В.И. Грабчак

В статье рассмотрен подход определения аппроксимирующих функций сопротивления снаряда, нелинейных относительно оцениваемых параметров, построенный на точных (прямых) методах решения системы линейных уравнений, что позволяет использовать метод наименьших квадратов для определения параметров аппроксимирующей функции.

Ключевые слова: *аппроксимация, функция сопротивления снаряда, метод наименьших квадратов, функция Гаусса, полином второго порядка, система алгебраических уравнений.*

Definition of approximating functions of air resisteance to the projectile movement, non-linear relatively to evaluated parameters

S. Bondarenko, Y. Kosovtsov, V. Hrabchak

The article considers the approach to definition of approximating functions of air resistance to the projectile movement, non-linear relatively to evaluated parameters, built on accurate (straight) methods of linear equations solution, which allows to use the method of the smallest squares to define the parameters of approximating function.

Key words: *approximating function, projectile resistance function, method of the smallest squares, Hauss function, second order polynom, algebraic equation system.*

УДК 551.501.822

П.І. Ванкевич, Є.Г. Іваник

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ В СИСТЕМАХ КОНТАКТНОГО ВИМІРЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРИ РУХОМИХ ОБ'ЄКТІВ ВІЙСЬКОВОЇ ТЕХНІКИ

Запропоновано методику розрахунку теплових параметрів засобів контактної термометрії, які відтворюють траєкторії руху досліджуваних об'єктів складних технічних систем озброєння різноманітного призначення. Отримано аналітичні залежності, що характеризують особливості процесів теплоперенесення, з допомогою яких виконано кількісну оцінку параметрів термоперетворювачів. Розроблена методика дозволяє мінімізувати тривалість перехідного режиму процесу теплопровідності в засобах контактної термометрії, що безпосередньо має вплив на похибку показів датчиків температури.

Ключові слова: *вимірювання температури, тепловий потік, теплообмін, розподіл температури, теплопровідність, термоперетворювачі, траєкторія руху досліджуваних об'єктів.*

Вступ

Першочергове завдання підтримання в належному стані Збройних Сил полягає в їх оснащенні військовою технікою різноманітного призначення, процес експлуатації якої передбачає неухильне підтримання встановленого рівня готовності і надійності. Ускладнення конструкцій обумовлює збільшення різноманітності складових (вузлів, блоків) згідно з особливостями фізико-хімічних процесів, характеру і рівня зовнішніх впливів та їх перебіг в реальних умовах експлуатації. Цілком достовірним джерелом інформації про тепловий стан теплонапружених об'єктів складних технічних систем є прямі чи побічні вимірювання параметрів, які визначають протікання теплових процесів. Методи вимірювань відрізняються великою різноманітністю, залежать від постановки задачі, габаритних розмірів моделі або натурного відтворення, доступності зон вимірювань, способів теплоперенесення тощо.

Сучасні складні системи машинобудування за своїм конструктивним виготовленням передбачають наявність рухомих інженерних складових, теплове діагностування яких не може здійснюватись відомими засобами