УДК 621.396.96

С.А. Цибуля

Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

ОБҐРУНТУВАННЯ ВИБОРУ РОЗРАХУНКОВИХ СХЕМ РУХУ БАЛІСТИЧНОГО ТІЛА

Викладено аспекти побудови математично обґрунтованої теорії, яка враховує залежність аеродинамічних сил, що діють на рухомий в повітряному просторі об'єкт, від його швидкості та орієнтації з метою вирізнення цих сил та їх врахування в рівняннях руху центра інерції. Отримано співвідношення, що визначають систему сил, шляхом розкладу вихідних залежностей в ряд Маклорена за виділеним малим параметром. При цьому відзначено, що в аналізі результатів вимірювань окремих складових системи аеродинамічних сил складають математичні методи асимптотичних розкладів. Також розглянуті питання, пов'язані з описом руху об'єкта, ключовим з яких є вибір системи координат. На прикладі модельної задачі окреслено коло питань, які мають місце у задачі модифікації законів руху шляхом введення певних фіктивних сил, пов'язаних з рухом відносно Землі вибраної системи координат. Виконано оцінку впливу відцентрової сили і сили Коріоліса на відхилення точки падіння рухомого тіла.

Ключові слова: *системи координат, аеродинамічні сили, снаряд, ракета, сила тяжіння, траєкторія руху снаряда чи ракети, балістичні таблиці, асимптотичні розклади.*

Вступ

Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури. Аеродинамічні сили, які діють на тіло, що рухається в повітрі, головним чином визначаються розподілом тиску на поверхні тіла. Розподіл тиску також залежить від термодинамічного стану повітря, а також від швидкості та орієнтації тіла. Теоретично визначити ці сили, відштовхуючись від форми тіла і законів аеродинаміки, дуже важко або майже неможливо, навіть на даний час, оскільки вони визначаються рівняннями в частинних похідних з надзвичайно складними граничними умовами. Спрощуючи припущення, які треба вводити, щоб зробити задачу доступнішою для побудови більш-менш адекватного алгоритму її розв'язання, призводять до результатів мало або зовсім далеких від дослідних даних, отриманих на практичних випробуваннях. Наприклад, вважаючи повітря ідеальною нестисливою рідиною, приходимо до висновку, що ідеальна куля, яка рухається в повітрі, не відчуває жодного опору. Тому виникає необхідність визначати сили дослідним шляхом, а оскільки неможливо виконати вимірювання сил для всіх бажаних фізичних умов, то актуальною є проблема побудови математично обґрунтованої теорії про залежність сили від швидкості, орієнтації досліджуваного рухомого об'єкта для того, щоб на основі вимірювання сил за певних фіксованих умов отримувати їх значення за всіх інших умов та факторів впливу.

Гіпотеза, яка за своєю простотою безпосередньо випливає як наслідок із нехтування аеродинамічними силами взагалі, полягає в тому щоб, залишаючись в рамках динаміки абсолютно твердого тіла, вважати рухомий об'єкт матеріальною точкою, яка перебуває під дією єдиної аеродинамічної сили, направленої по дотичній до траєкторії; це означає, що єдиною аеродинамічною силою має бути лобовий опір. Для певних видів артилерійських боєприпасів ця сила може бути виміряною в аеродинамічній трубі або іншими сучасними засобами. Далі, за допомогою інтерполяції отримують оцінку сили опору для інших швидкостей, які реально розвиває рухомий об'єкт під час польоту; отже, в межах прийнятої гіпотези можна складати рівняння руху і формулювати задачу визначення траєкторії. Цей спосіб найрозповсюдженіший в зовнішній балістиці і досі приводить до певних результатів. Більшість траєкторій, на основі яких формуються таблиці стрільби і бомбометання, отримано саме з використанням такого підходу. Однак для сучасних умов стрільби і нових видів артилерійських зарядів та ракетних систем дана теорія виявляє свою неспроможність пояснити нові явища і ефекти, які спостерігаються на практиці; зокрема, було виявлено, що деякі види авіаційних бомб у повітрі летять довше, ніж в безповітряному середовищі. Це неможливо пояснити за допомогою гіпотези про наявність тільки одного опору, якщо не припустити парадоксальне про наявність від'ємного опору.

Ще одна обставина, яка вказує на необхідність створення більш повної теорії, полягає в необхідності деталізації вивчення руху артилерійського снаряда з метою визначення стійкості його руху в момент польоту. Наприклад, звичайний артилерійський снаряд, якщо йому не буде надано обертального руху, буде описувати неправильну траєкторію. Якщо ж надати йому надмірного обертання, його вісь не буде слідувати траєкторії, а залишатиметься приблизно паралельною осі каналу ствола, внаслідок чого він буде летіти боком і, можливо, навіть влучить у ціль не носовою частиною, а донною. Обертальний рух снаряда має підбиратись таким чином, щоб він сумісно з аеродинамічними силами змушував вісь снаряда залишатись в околі дотичної до траєкторії. Тому для створення такої теорії необхідно вивчати не лише силу опору, але й інші аеродинамічні сили, як то: підіймальна сила, бокова сила, сила Магнуса, а також сила Коріоліса, тобто сила, створена рухом повітряних мас. Але артилерійський снаряд з великим припущенням можна вважати матеріальною точкою, бо окремі його частини рухаються по різних траєкторіях та з різними швидкостями. Внаслідок цього виникає питання: що саме слід розуміти під швидкістю снаряда взагалі?

Процес вивчення руху снаряда в повітряному просторі супроводжується низкою науково-технічних задач, які становлять для фахівців, що займаються зовнішньою балістикою, складні математичні проблеми. Однією з найскладніших є детальний опис комплексу аеродинамічних сил, які діють на рухоме тіло. Значну роль у вирішенні даної проблеми мали праці основоположників російської школи балістики вчених-артилеристів Н.В. Маієвського, Н.А. Забудського, і в подальшому дослідження радянських вчених Д.А. Вентцеля, Б.Н. Окунєва, В.С. Пугачова. Подальший етап розвитку зовнішньої балістики зумовив появу низки нових досліджень українських вчених, представлених в роботах [1-3].

Проблема вивчення польоту снаряда в атмосфері, тобто в фізичному просторі, яке виявляє опір руху, є основним предметом дослідження фахівців, які займаються забезпеченням стрільби артилерії [4-8]. Наскільки великим є опір, можна уявити собі, беручи до уваги факт, що дальність польоту снаряда навіть за сприятливих умов складає не більше 80% від дальності, яка може досягатись за відсутності атмосфери, тобто без опору руху. Крім зменшення дальності польоту вплив атмосфери виявляється також у відхиленні снаряда від площини стрільби (внаслідок дії повітряних мас, тобто вітру). Отже, найточніше урахування дії всіх складових аеродинамічної сили на політ снаряда є важливим елементом забезпечення і ефективності стрільби.

Для забезпечення адекватного опису польоту об’єкта важливим є вибір системи координат, який не завжди виявляється тривіальною задачею, як це може здатись з першого погляду. Стандартний підхід до вивчення руху тіла полягає у тому, що суміщається початок координат з деякою зручною точкою, наприклад, з початковою точкою траєкторії. Аксіальну вісь z направляємо вертикально і розміщуємо площину xy в площині, дотичній до поверхні Землі. Далі використовуємо основне рівняння динаміки (другий закон Ньютона), але при цьому цілком нехтується те, що вибрана координатна система бере участь в обертанні Землі навколо Сонця, виправдовуючи це тим, що такий рух координатної системи для дослідження руху літального об’єкта (а саме снаряда) є несуттєвим. Але такий рух не є рівномірним, внаслідок чого застосування другого закону Ньютона тут не виправдане, більше того, воно неадекватно описуватиме рух досліджуваного тіла (об’єкта зовнішньої балістики).

Сучасна балістика вивчає широке коло питань, пов’язаних із вибором раціональних траєкторій руху літальних апаратів. Проблема розробки методів розрахунку траєкторії артилерійських снарядів є комплексною і головним її моментом є дослідження поступального руху снарядів. Під впливом змін, що на даний час відбуваються в артилерії, перманентний розвиток зовнішньої балістики спрямований на задоволення потреб сучасної артилерійської практики [1-6].

Метою статті є математичне обґрунтування теорії, яка враховує залежність аеродинамічних сил, що діють на рухомий в повітряному просторі об’єкт, від його швидкості та орієнтації у вибраній, за певними умовами, системі координат.

Основна частина

Нехай точка О буде початком локальної системи координат, пов’язаної з рухомим об’єктом, $\vec{v}$ – швидкість руху цієї точки, $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості снаряда. З метою уникнення ускладнень будемо нехтувати власним обертанням снаряда. Система аеродинамічних сил, яка діє на рухоме тіло, у відповідності до основних законів механіки [10] може приводитись до головного вектора $\vec{F}$, який проходить через точку О, і до головного моменту $\vec{M}$.

З міркувань симетрії можна зробити висновок, що вектор $\vec{F}$ лежить в площині руху, а $\vec{M}$ – перпендикулярний до неї, що відображено на рис. 1.

Складовою вектора $\vec{F}$ вздовж вектора швидкості $\vec{v}$, направлена в зворотному напрямі, і перпендикулярна до неї, відповідно є лобовий опір та підіймальна сила. Момент $\vec{M}$ буде стабілізаційним або перевертальним залежно від свого знака – перевертальним для більшості артилерійських снарядів і стабілізаційним для авіабомб. Найпростіша теорія отримується в припущенні [7], що вектори $\vec{F}$ і $\vec{M}$ залежать тільки від швидкості $\vec{v}$ і кута θ між $\vec{v}$ і віссю снаряда, тобто кута атаки. Якщо позначити через $\vec{a}$ одиничний вектор осі снаряда, то матимемо

$$\vec{F}=\vec{F}(\vec{v},\vec{a}),\ \vec{M}=\vec{M}(\vec{v},\vec{a}). \quad (1)$$

Залежність (1) показує, що ми нехтуємо впливом кутової швидкості $\vec{\omega}$ на систему сил, що діє на снаряд. Насправді дане нехтування не має під собою ніякого фізичного сенсу, і можна очікувати, що побудована таким чином теорія буде неповною, можна навіть показати, що вона буде містити протиріччя.

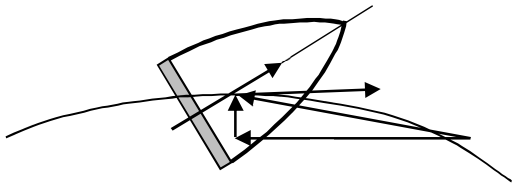

Рис. 1. **Система аеродинамічних сил у випадку плоского руху**

Припустимо, що центр приведення О переміщується в точку О′, причому $OO' = \vec{r}$. Тоді згідно з залежностями кінематики швидкість $\vec{v}'$ точки О′ буде рівна $\vec{v} + r \times \vec{\omega}$ і внаслідок висунутої гіпотези на основі (1) отримуємо, що система сил приведеться до головного вектора $\vec{F}^*(\vec{v} + \vec{r} \times \vec{\omega}, \vec{a})$, прикладеного в точці О′, і до головного моменту $\vec{M}^*(\vec{v} + \vec{r} \times \vec{\omega}, \vec{a})$, причому функції $\vec{F}^*$ і $\vec{M}^*$ не обов'язково мають співпадати з функціями $\vec{F}$ і $\vec{M}$. Але головний вектор не залежить від центра приведення, а головний момент змінюється на величину $\vec{r} \times \vec{F}$, тому

$$\vec{F}(\vec{v}, \vec{a}) = \vec{F}^*(\vec{v} + \vec{r} \times \vec{\omega}, \vec{a}),$$

$$\vec{M}(\vec{v}, \vec{a}) = \vec{M}^*(\vec{v} + \vec{r} \times \vec{\omega}, \vec{a}) + \vec{r} \times \vec{F}(\vec{v}, \vec{a}). \qquad (2)$$

Якщо розглядати $\vec{a}$ як незмінний вектор, тоді залежності (2) мають бути тотожними відносно векторів $\vec{v}$, $\vec{r}$ і $\vec{\omega}$. Нехай $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ такі дві швидкості, що $\vec{v}_1 \vec{a} = \vec{v}_2 \vec{a}$. Тоді має місце рівність $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{n}$, де вектор $\vec{n}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$ і тому може бути поданим в формі $\vec{r} \times \vec{\omega}$ за відповідного вибору вектора $\vec{\omega}$. Тому можна записати $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{r} \times \vec{\omega}$. Але з першої рівності залежностей (2) маємо:

$$\vec{F}(\vec{v}_1, \vec{a}) = \vec{F}^*(\vec{v}_1 + \vec{r} \times \vec{\omega}, \vec{a}) = \vec{F}^*(\vec{v}_2, \vec{a}) = \vec{F}(\vec{v}_2, \vec{a}).$$

Таким чином бачимо, що сила $\vec{F}$ є функцією тільки скалярного добутку $\vec{v}_1 \vec{a}$. З міркувань симетрії снаряда зрозуміло, що складова вектора $\vec{F}$, перпендикулярна до $\vec{a}$, змінює свій знак сумісно зі зміною кута атаки. Однак зміна знака кута атаки не впливає на скалярний добуток $\vec{v}_1 \vec{a}$; тому складова $\vec{F}$ по нормалі до $\vec{a}$ просто відсутня і $\vec{F}$ є сила, направлена вздовж осі снаряда, або осьовий опір. Подібним чином можна встановити, що момент $\vec{M}$ є також функцією тільки добутку $\vec{v}_1 \vec{a}$; оскільки момент змінює знак при зміні кута атаки та вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$, то він має бути рівний нулю.

Отже, прийшли до протиріччя, що свідчить про те, що розглядувана система сил неможлива за винятком того випадку, коли вона складається тільки з однієї сили – осьового опору; однак цей випадок також слід відкинути на основі міркувань від супротивного, якщо проаналізувати випадок, коли кут атаки буде рівний 90°. Тому приходимо до висновку, що необхідна нова гіпотеза, внаслідок чого припускатимемо, що сили і моменти залежать не тільки від векторів швидкості і одиничного вектора вздовж осі снаряда, але і від кутової швидкості, тобто залежність (1) записуємо у наступному вигляді

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{v}, \vec{\omega}, \vec{a}), \quad \vec{M} = \vec{M}(\vec{v}, \vec{\omega}, \vec{a}).$$

Зрозуміло, що співвідношення (2) також мають виконуватись для уточнених сил з метою, щоб система сил не залежала від центра приведення. Тому головною метою досліджень є підбір якомога простіших функціональних залежностей, які не мають суперечити очевидному фізичному сенсу і характеру розглядуваного явища. Внаслідок таких припущень та міркувань симетрії і принципу припущення лінійності довільної величини, яка може вважатись лінійною, якщо цьому не суперечать дані експерименту, отримали розвиток більшість теорій про рух снарядів з урахуванням обертання навколо своєї осі [5-9].

Розкладемо вектор $\vec{v}$ на дві складові: $\vec{v}_1$, направлену вздовж вектора $\vec{a}$, і $\vec{v}_2$, перпендикулярну до $\vec{a}$; подібним чином розкладемо $\vec{F}$ на $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Оскільки момент $\vec{M}$ і вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярні до площини руху, то їх відмінні від нуля складові є M_3 і ω_3. Якщо снаряди спроектовані якісно і постріл виконано правильно, то можна очікувати, що кут атаки має залишатись малим вздовж всієї траєкторії і його коливання відносно деякого середнього значення будуть повільними. Тому найдоцільніше розглядати випадок, коли кут атаки θ і разом з ним складова $\vec{v}_2$ малі (внаслідок виконання очевидної рівності $tg\theta = v_2 / v_1$); подібним чином приходимо до висновку, що буде малою і складова ω_3. Якщо вважати середні значення величин v_2 і ω_3 рівними нулю, то розкладаючи складові сили і моменти в ряд Маклорена в околі точок v_2 і ω_3, зберігаючи в розкладах тільки лінійні члени, отримуємо:

$$F_1 = F_1(v_1, v_2, \omega_3) = a_1 + b_1 v_2 + c_1 \omega_3,$$

$$F_2 = F_2(v_1, v_2, \omega_3) = a_2 + b_2 v_2 + c_2 \omega_3,$$

$$M_3 = M_3(v_1, v_2, \omega_3) = \alpha + \beta v_2 + \gamma \omega_3,$$

причому коефіцієнти цих розкладів залежать від швидкості руху v_1. З міркувань симетрії видно, що коефіцієнти b_1, c_1, a_2 і α рівні нулю. Наприклад, слід очікувати, що складова F_2 рівна нулю, коли кут атаки і кутова швидкість рівні нулю, звідки $a_2 = 0$. Таким чином одержуємо можливі вирази для сил і моменту, які діють на снаряд в польоті:

$$F_1 = a_1, \; F_2 = b_2 v_2 + c_2 \omega_3, \; M_3 = \beta v_2 + \gamma \omega_3. \quad (3)$$

Неважко уяснити фізичний смисл окремих членів в залежностях (3). Зокрема, член $a_1 = a_1(v_1)$, який ідентифікує цілком силу F_1, є осьовим опором, тобто в найпростішому випадку головною частиною аеродинамічної сили. Член b_2v_2 представляє поперечну силу, викликану поперечною швидкістю, а $c_2\omega_3$ – поперечну силу, викликану поперечним обертанням (тут доцільно використовувати термін „поперечне обертання”, тому що найчастіше спостерігається обертання відносно поздовжньої осі снаряда зі значно більшою кутовою швидкістю). Член βv_2 є поперечний момент, викликаний поперечною швидкістю або, інакше, – відновлювальний момент. Член $\gamma\omega_3$ – поперечний момент, викликаний поперечним обертанням, або згасаючий (демпфуючий момент). Введена раніше величина лобового опору і підіймальна сила тут не беруть участі, тому що ми виконали розклад сили по осі снаряда та по нормалі до неї замість того, щоб виконати цей розклад відносно траєкторії. Зазвичай лобовий опір отримується як складова в напрямі швидкості (тобто за напрямом вектора $\vec{v}$, і неважко помітити, що він збігається з осьовим опором, тобто складовою опору вздовж поздовжньої осі снаряда з точністю до членів другого порядку відносно параметрів v_2 і ω_3; внаслідок цього для визначення траєкторії з метою спрощення приймається значення лобового опору, рівне a_1. Так само з точністю до величин другого порядку малості, $v = v_1$, і тому в межах лінійного наближення можна приймати лобовий опір рівним $a_1(v)$.

Опис системи сил за допомогою співвідношень (3) отримано шляхом відкидання в розкладі Маклорена членів порядку вище першого. Ці члени вищих порядків можуть бути присутніми у рівняннях руху, внаслідок чого рівності (3) можна розглядати тільки як наближене представлення системи сил, що адекватно лише за умови малого або повільно змінного кута атаки. Однак, неважко помітити, що такий опис систем сил узгоджується зі співвідношеннями (2); для цього треба накласти на коефіцієнти в співвідношеннях (3) умови відповідності законам перетворення при перенесенні центра приведення. Отже, опис системи сил за допомогою співвідношень (3) в більшості практичних випадків може вважатись цілком задовільним.

До цього ми виходили з передумови, що рух відбувається в площині, що має місце тільки за умови необертальності снаряда. Якщо застосовувати описаний прийом до снаряда, що обертається, то виникає додатково п’ять сил і моментів, залежних від величини ω_1. Ці сили і моменти відомі під назвою „ефект Магнуса” [11, 12]. Зазвичай ці сили і моменти малі, але їх урахування необхідне для пояснення деяких явищ, таких як деривація снаряда, що обертається [12-14].

Коефіцієнти в розкладі (3) вважались залежними тільки від величини v_1, але крім того вони залежать від низки факторів, основними з яких можна вважати фізичний стан атмосфери, в якій в даний момент перебуває снаряд, його форма і калібр. Фізичні міркування та основи теорії розмірностей дають підставу вважати, що у формулах, які визначають систему аеродинамічних сил, з’являються певні аеродинамічні коефіцієнти, які виражають ці залежності. Головний з них це коефіцієнт лобового опору, який визначається співвідношенням

$$F_1 = A_1 = \rho d^2 v_1^2 K_{DA},$$

де ρ – густина повітря, d – діаметр снаряда (калібр). Очевидно, що величина A_1 має розмірність сили (маса×довжина/час^2), а добуток $\rho d^2 v_1^2$ має таку ж розмірність, тоді K_{DA} є величина безрозмірна, тобто вона інваріантна стосовно довільної системи координат. Звичайно значення K_{DA} може залежати від багатьох безрозмірних параметрів, але багаточисленні експерименти показали, що, головним чином, цей коефіцієнт залежить від геометрії снаряда і відношення $\frac{v_1}{a}$, яке має назву „число Маха”, де величина a – швидкість звуку в локальному околі, де відбувається рух снаряда, пропорційна квадратному кореню з абсолютної температури. Отже, для снаряда певних розмірів і форми можна написати $K_{DA} = K_{DA}\left(\frac{v_1}{a}\right) = K_{DA}(M)$. Коефіцієнт K_{DA} має невелику залежність від геометричних розмірів снаряда; цю залежність можна виразити за допомогою множника d^2, крім того, K_{DA} майже не залежить від форми снаряда, а в основному визначається його формою [7], і тому грубе наближення для осьового опору можна отримати, використовуючи будь-яке значення з відомих коефіцієнтів K_{DA}. Отже, можна наближено вважати, що осьовий опір рівний повному лобовому опору або $K_{DA} = K_D$, звідки величина лобового опору визначається значенням $\rho d^2 v^2 K_D$. Безрозмірне число K_D, яке має назву „коефіцієнт лобового опору”, подане залежно від числа Маха у вигляді графіка [8], наведеного на рис. 2.

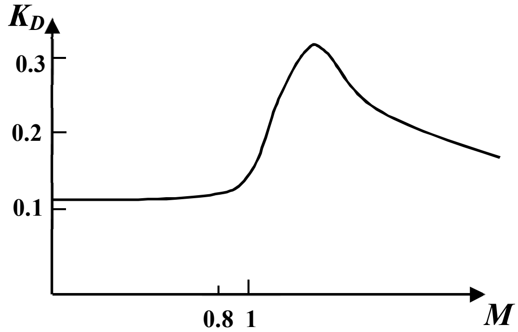

Рис. 2. **Залежність коефіцієнта лобового опору від числа Маха** *M*

Інші аеродинамічні сили також можуть бути вираженими за допомогою величин ρ, d, v_1 і відповідних безрозмірних коефіцієнтів. Наприклад, поперечна сила, виражена як $b_2 v_2$, записується у вигляді $\rho d^2 v_1^2 K_N$, де $K_N = K_N\left(\frac{v_1}{a}\right) = K_N(M)$ – безрозмірна величина. Підіймальна сила або сила, нормальна до траєкторії, отримується з складових поперечної сили і осьового опору по нормалі до траєкторії. Беручи до уваги малість кута атаки і покладаючи $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = \frac{v_2}{v_1}$, отримуємо як перше наближення значення підіймальної сили: $\rho d^2 v_1^2 K_N - \rho d^2 v_1^2 K_{DA} \frac{v_2}{v_1} =$
$= \rho d^2 v_1^2 \left(K_N - K_{DA} \frac{v_2}{v_1} \right) = \rho d^2 v_1^2 K_L$.

У цьому наближенні коефіцієнт підіймальної сили визначається залежністю

$$K_L = K_N - K_{DA} \frac{v_2}{v_1}.$$

Тепер припустимо, що нам відомі аеродинамічні коефіцієнти, а також густина, абсолютна температура (а тому і швидкість звуку), а також швидкість вітру в тій частині повітряного простору, де рухається снаряд. Тоді в найзагальнішій формі відносно системи координат, пов'язаної із Землею, отримуємо два векторних або шість скалярних рівнянь: три – для руху центра інерції і три – для обертального руху. Якщо ставиться задача знаходження траєкторії снаряда, то її завжди можна розв'язати наближено, з довільним ступенем точності. Для складання Таблиць стрільби є достатнім найпростіший варіант при виконаних припущеннях (тобто з урахуванням залежностей (3) для першого наближення). Цей варіант отримується нехтуванням всіма аеродинамічними силами, крім лобового опору, та в припущенні відсутності вітру, а температура і густина повітря відповідають нормальним умовам атмосфери. Якщо початок координат розмістити на зрізі ствола гармати і на рівні моря, причому вісь x розміщено горизонтально в напрямі ведення стрільби, а вісь y вертикально, то умови нормального атмосферного стану визначаються рівностями

$$\rho = \rho_0 e^{-hy}, \; T = T_0 e^{-h_1 y},$$

які узгоджуються з дослідними даними [11] і є очевидними з теоретичних передумов, що відповідають звичайним фізичним законам. Величини ρ_0, h, T_0, h_1 – деякі сталі, які завжди можна знайти у працях із зовнішньої балістики, наприклад [4-9].

Тому припускаючи, що коефіцієнт K_D для розглядуваного типу снаряда відомий, отримуємо рівняння руху центра інерції у вигляді

$$m\ddot{x} = -\frac{D\dot{x}}{v}, \; m\ddot{y} = -mg - \frac{D\dot{y}}{v}, \qquad (4)$$

де $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, $D = \rho v^2 K_D\left(\frac{v}{a}\right)$, $a = a_0\sqrt{T}$, $a_0 = const$.

Якщо початкові значення компонента вектора швидкості $\dot{x}$, $\dot{y}$ задані, то система (4), яка має назву „нормальні рівняння руху", може бути розв'язаною більш менш точно, у тому числі з використанням різноманітних числових методів [15, 16]. Ще з часів зародження і розвитку методів зовнішньої балістики відомо багато цікавих наближених методів, зокрема метод Сіаччі, метод Хічкока-Кента [17, 18], але на даний час використання сучасних обчислювальних засобів нівелює технічний бік проблеми отримання остаточних кількісних результатів, на основі яких формуються Таблиці стрільби.

Щоб оцінити проблеми, які виникають в зв'язку з питанням зручності аналізу руху балістичних тіл, можна розглянути просту модельну задачу, яка наводиться у всіх класичних підручниках з теоретичної механіки, про одновимірний рух вздовж осі x, а Землю змоделюємо нерухомою площиною. Припустимо, що тіло рухається з постійним прискоренням a, в початковий момент часу $t = 0$ воно перебуває на початку координат і швидкість його рівна нулю. Нехай в цей же момент $t = 0$ з початковою швидкістю $v = 0$, без тертя, починає рухатись ідеальна кулька. Швидкість $t = 0$ можна вважати заданою відносно осі, а також відносно поверхні Землі, оскільки в початковий момент часу $t = 0$ швидкість руху рівна нулю.

Тут логічно брати до уваги дві системи координат: одна, пов'язана з Землею, інша – з рухомим тілом. Якщо O' вважати ту точку тіла, з якої почала рух кулька, то ця точка має прискорення a і $OO' = \frac{1}{2}at^2$. Тому координати кульки відносно Землі x і відносно тіла x' пов'язані між собою залежністю

$$x = x' + \frac{at^2}{2}.$$

Оскільки в напрямі осі x на кульку жодні сили не діють, то рівняння її руху матиме вигляд

$$m\ddot{x} = 0. \qquad (5)$$

Підставляючи у залежність (5) $\ddot{x} = \ddot{x}' + a$, отримуємо

$$m\ddot{x}' = -ma. \qquad (6)$$

Однак спостерігач, який пов'язаний з рухомим тілом і не знає про його прискорений рух або нехтує ним, вважатиме, що справжнє рівняння руху, на відміну від (6), є

$$m\ddot{x}' = 0,$$

внаслідок чого він не матиме змоги правильно передбачити поведінку кульки. Зокрема, дуже дивною буде картина, коли кулька починає рух у зворотному напрямі.

У більшості випадків виявляється надзвичайно незручним використання систем координат, які рухаються без прискорення, зокрема, це яскраво виявляється в описі аеродинамічних сил, які діють на снаряд, у вигляді функцій швидкості, заданої відносно нерухомої системи координат, тому що ці сили залежать від швидкості, відносно системи координат, яка обертається разом з Землею. Найчастіше використовують зручні системи координат, незалежно від того, як вони рухаються, і змінюють закони руху таким чином, щоб врахувати прискорення системи координат. Відзначимо, що в розглянутому прикладі ми отримали правильне рівняння руху шляхом введення фіктивної сили $-ma$, внаслідок чого вже немає потреби звертати увагу на прискорення точки O'.

Цей прийом є типовим для кінетики: необхідна модифікація законів руху отримується шляхом введення фіктивних сил, які обчислюються на основі залежностей, які пов’язують між собою нерухому і рухому системи координат. Для систем координат, які обертаються з деякою кутовою швидкістю, завжди є потреба у використанні векторних позначень, тому під час проведення досліджень в галузі балістики для опису руху артилерійського снаряда, як твердого тіла, слід активно використовувати апарат векторної алгебри.

Використання векторного аналізу є обов’язковим для виведення рівняння руху тіла відносно системи координат, пов’язаної з Землею, тому розглянемо саме такий приклад: вважаємо рух Землі (нехтуючи її рухом навколо Сонця) обертальним навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Цей вектор направлений від Південного полюса до Північного і має модуль, рівний приблизно 0,000073 рад/сек. Під вектором $\vec{x} = \vec{x}(t)$ розуміємо вектор, який визначає положення розглядуваної матеріальної точки відносно системи координат, пов’язаної з Землею. Початок цієї системи розмістимо на поверхні Землі, вісь x_3 направимо вертикально вгору, вісь x_1 – до сходу, вісь x_2 – до півночі. Якщо $\vec{r}$ є вектор, який визначає положення початку координат відносно центра Землі, то $\vec{r} + \vec{x}$ визначає положення розглядуваної матеріальної точки відносно центра Землі.

Нехай $\vec{F}$ є рівнодійною всіх гравітаційних, аеродинамічних та інших сил, які діють на матеріальну точку, що рухається в атмосфері. Тоді рівняння руху матиме вигляд

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + m\left\{\omega^2\left(\vec{r} + \vec{x}\right) - \left[\vec{\omega}\cdot\left(\vec{r} + \vec{x}\right)\right]\vec{\omega}\right\} - 2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{x}}.$$

Отже, для того, щоб класичний закон Ньютона «сила рівна добутку маси на прискорення» задовольнявся, принаймні формальним чином, в рухомій системі координат слід ввести дві фіктивні сили. Перша з яких,

$$m\left\{\omega^2\left(\vec{r} + \vec{x}\right) - \left[\vec{\omega}\cdot\left(\vec{r} + \vec{x}\right)\right]\vec{\omega}\right\},$$

залежить тільки від матеріальної точки і не містить швидкості руху. Видно, що вона направлена від осі Землі і має величину $m\omega^2 d$, де d – відстань матеріальної точки від осі Землі. Це добре відома відцентрова сила. Для рухів, які відбуваються в межах малих ділянок земної поверхні, ця сила близька до сталої, але не є настільки малою, що її величиною можна знехтувати. Саме відцентрова сила разом з силою тяжіння визначають (за допомогою викоса) напрям вертикалі і величину g, прискорення сили тяжіння.

Друга фіктивна сила $-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{x}}$, відома як сила Коріоліса, вона виявляє свою дію лише у тому випадку, коли матеріальна точка рухається відносно Землі. Ця сила зазвичай мала, але значно змінюється від траєкторії до траєкторії. Для швидкостей, які становлять приблизно 305 м/с, прискорення, обумовлене такою силою, не перевищують значення 0,05 м/с^2.

Обчислимо наближено вплив сили Коріоліса для найпростішого модельного випадку, як ілюстративний додаток до методу, яким слід користуватись при розв’язуванні задач зовнішньої балістики.

Припустимо, що відбувається кидання матеріальної точки в ідеальній пустоті з поверхні Землі вертикально вгору, надаючи при цьому точці початкову швидкість v_0. З точки зору практики ясно, що рух відбуватиметься дуже близько до осі x_3 і вектор переміщення $\vec{x} = \vec{x}(t)$ має складові $(0, 0, x_3)$. Тоді наближені значення складових сили Коріоліса будуть $(-2m\omega\dot{x}_3\sin\lambda, 0, 0)$, де λ є полярним кутом точки O, тобто кут, який вимірюється дугою меридіана від Північного полюса до точки O. Нехтуючи відцентровою силою, отримуємо рівняння руху у вигляді

$$\ddot{x}_1 = -2\omega\dot{x}_3\sin\lambda\,,\ \ddot{x}_2 = 0\,,\ \ddot{x}_3 = -g\,. \tag{7}$$

Інтегрування двічі першого з рівнянь (7) дає залежність

$$x_1 = -2\omega\sin\lambda\int_0^t x_3\,dt\,. \tag{8}$$

Оскільки координата x_3 додатна між моментом пострілу і моментом падіння на Землю, то з формули (8) видно, що матеріальна точка впаде на поверхню Землі на захід від місця пострілу. Підставляючи у формулу (8) величину $x_3 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, отриману інтегруванням третього з рівнянь (7), отримуємо, що відхилення у західному напрямі в точці падіння становить

$$\frac{4v_0^2\omega\sin\lambda}{3g^2},$$

що складатиме приблизно 14,3 м за умови початкової швидкості 305 м/сек і $\lambda = 30^{\circ}$. Якщо припустити, що матеріальна точка, замість підкидання вертикально вгору, падає з деякої висоти, то вона відхилятиметься у східному напрямі, тому що координата x_3 вздовж траєкторії всюди від’ємна.

Схема розв’язування задач подібного типу полягає в наступному. Нехай в диференціальних рівняннях руху, які треба розв’язати, містяться сили у вигляді членів, що утруднюють побудову аналітичного розв'язку. Поки рівняння руху не проінтегровані, точні значення цих сил залишаються невідомими, оскільки вони безпосередньо залежать від траєкторії руху, яка на разі не встановлена. Однак внаслідок малості цих сил, їх вплив на саму траєкторію незначний, тому величину сил можна обчислити без значної похибки за допомогою траєкторії, отриманої внаслідок нехтування малими силами. Далі, використовуючи обчислені значення малих сил, можна знову визначити траєкторію і таким чином оцінити, наскільки змінюється траєкторія вже з урахуванням малих сил. Такий процес за багатократного його повторення (хоча і не є простим в практичній реалізації відповідних обчислювальних алгоритмів) майже збігається з ідеєю розв'язування диференціальних рівнянь методом послідовних наближень [15, 16].

Точність оцінок отриманих в даному випадку значень, наприклад, відхилення точки падіння, визначити надзвичайно тяжко. Тому бажаним є одержання математично строгого доведення того, що відхилення матеріальної точки по широті не переважає деякої визначеної величини ε. Такого роду результати можна інколи отримати за певних припущень, але може виявитись, що ця величина ε зовсім не придатна для практичних застосувань. Наприклад, можна було б з упевненістю констатувати, що відхилення на захід не перевищує 200 м, однак такий результат малопридатний для практичного застосування, особливо при оцінки балістичних характеристики при складанні Таблиць стрільби. Грубі оцінки, подібні до тих, які отримані раніше, часто виявляються кращими, ніж ті, які вдається дістати, слідуючи строгим математичним принципам і законам. Зрозуміло, що особливої довіри до такого роду оцінок немає без ретельної перевірки за допомогою експериментів обчислювального або фізичного характеру.

Висновки

Отримано залежності, які описують систему сил і моментів, що діють на снаряд в процесі руху, шляхом розкладу в ряди Маклорена за степенями складової лінійної і кутової швидкостей. Записано систему рівнянь руху центра інерції, яка в загальному є нелінійною. Виконано тлумачення окремих членів у розкладах в ряд Маклорена сил та моментів в лінійному наближенні.

Наведені приблизні обчислення та експерименти вказують, що для снарядів, розрахованих на помірну дальність польоту, наприклад, в межах кількох десятків кілометрів, систему відліку, пов'язану з Землею, можна розглядати як інерційну, при цьому, можливо, будуть потрібні лише невеликі поправки. Однак для руху керованих ракетних пристроїв, таких як крилаті ракети, міжконтинентальні ракети, цього виявиться недостатньо. Також дуже складна ситуація виникає у випадку стрільби з літака, який рухається з великою надзвуковою швидкістю. Це пов'язано з тим, що у цьому разі швидкості і прискорення літака і снаряда мають однаковий порядок, тому нехтування силами інерції може призвести до значних похибок. При застосуванні сучасних артилерійських боєприпасів та високоточної зброї ці сили будуть настільки великі, що їх вплив вже не може бути врахованим у вигляді простої поправки.

Список літератури

1. Основи теорії польоту і конструкції ракет: навчальний посібник / П.І. Гайда, П.Є. Трофименко, М.М. Ляпа. – Суми: Сумський державний університет, 2011. – 248 с.

2. Макеев В.И. Исследование влияния параметров работы реактивного двигателя на дальность и кучность стрельбы реактивных снарядов / В.И. Макеев, В.И. Грабчак, П.Е. Трофименко, Ю.И. Пушкарев // Системы обработки информации. – 2008. – Вип. 6 (73). – С.77–81.

3. Макєєв В.І. Математична модель просторового руху літального апарату на твердому паливі в атмосфері / В.І. Макєєв, М.М. Ляпа, Л.Д. Назаренко // Вісник СумДУ. – 2008. – № 2. – С. 5–12. – (Серія технічні науки).

4. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лысенко. – М. : Машиностроение, 2005. – 607 с.

5. Коновалов А.А. Внешняя баллистика / А.А. Коновалов, Ю.В. Николаев. – М. : ЦНИИ информации, 1979. – 228 с.

6. Лысенко В.М. Баллистика ствольных систем. Справочная библиотека разработчика-исследователя / Л.Н. Лисенко, В.В. Грабин. – М.: Машиностроение, 2006. – 461 с.

7. Лисенко В.М. Теорія польоту: Навчальний посібник / В.М. Лисенко, В.І. Грабчак, Д.А. Новак. – Вид-во СумДУ, 2006. – 200 с.

8. Равдин И.Ф. Внешняя баллистика неуправляемых реактивных снарядов / И.Ф. Равдин. – М.: ВАА, 1972. – 184 с.

9. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов / Ю.Г. Сихарулидзе. – М.: Наука, 1982. – 352 с.

10. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. / Н.Н. Бухгольц. – М. : Наука, 1972. – 282 с

11. Савкин Л.С. Метеорология и стрельба артиллерии / Л.С. Савкин, Б.Д. Лебедев. – М. : Воениздат, 1974. – 144 с.

12. Грабчак В.І. Апроксимація функцій аеродинамічних коефіцієнтів сили опору повітря методом найменших квадратів / В.І. Грабчак // Військово-технічний збірник. – 2012. – № 2(7). – С.20-24.

13. Грабчак В.І. Особливості вибору системи координат в задачах зовнішньої балістики / В.І. Грабчак, П.І. Ванкевич, Є.Г. Іваник // Збірка доповідей (тез доповідей) науково-технічного семінару 27-28 березня 2013 р. «Перспективи розвитку ракетних військ і артилерії Сухопутних військ», Львів. – 2013. – С.109.

14. Грабчак В.І. Обґрунтування вибору аеродинамічних сил в рівняннях руху задач зовнішньої балістики / В.І. Грабчак, П.І. Ванкевич, Є.Г. Іваник // Збірка тез доповідей Міжнародної науково-технічної конференції «Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ», Львів, 22-24 травня 2013 р. – С.109-110.

15. Бабенко К.И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко. – М. : Наука, 1986. – 744 с.

16. Гаврилюк І.П. Методи обчислень / І.П. Гаврилюк, В.Л. Макаров. – Київ: Вища школа, 1995. – Ч. 1 – 452 с.; Ч. 2. – 431 с.

17. Cranz K.J. Lehrbuch der Ballistik / K.J. Cranz. – Berlin: Springer-Verlag, 1927. – 484 s.

18. McShane E.J. Exterior Ballistics / E.J. McShane, J.L. Kelley, P.V. Reno. – Denver: University of Denver Press, 1953. – 382 p.

Рецензент: д.т.н., с.н.с. Яковлев М.Ю., Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів.

ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА РАСЧЕТНЫХ СХЕМ ДВИЖЕНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

С.А. Цыбуля

Изложено аспекты построения математически обоснованной теории, учитывающей зависимость аэродинамических сил, которые действуют на движущийся в воздушном пространстве объект, от его скорости и ориентации, с целью детерминации этих сил и их учета в уравнениях движения центра инерции. Получены соотношения, определяющие систему сил, путем разложения исходных зависимостей в ряд Маклорена по выделенному малому параметру. При этом отмечено, что в анализе результатов измерений отдельных составляющих системы аэродинамических сил составляют математические методы асимптотических разложений. Также рассмотрены вопросы описания движения объекта, ключевым среди которых является выбор системы координат. На примере модельной задачи очерчен круг вопросов, имеющий место в задаче модификации законов движения путем введения определенных фиктивных сил, связанных с движением относительно Земли выбранной системы координат.

Ключевые слова: *системы координат, аэродинамические силы, артиллерийский снаряд, ракета, сила тяготения, траектория движения снаряда или ракеты, баллистические таблицы, асимптотические разложения.*

SUBSTANTIATION OF THE CHOICE CALCULATE SCHEMES OF THE MOVING BALLISTICAL BODY

S. Tcybulya

Aspects of building a mathematical theory, which into account dependence of aerodynamically forces from speed, orientation moving in the air space of the object, with aim of auditing and determination's in equation of motion in the center of inertia is given. The correlations, which determination of system forces, by decomposition initial dependence in the Maclaurin series for selected small parameter is given. It's notice, that in the analysis of results of measurements separate component of the system aerodynamically forces make mathematical methods asymptotic decomposes. Also consider the description of object motion, key among which is choice coordinate system. For a model problem outlined a range of issues taking place in the problem of modifying the laws of motion by introducing certain fictitious forces associated with the movement of the Earth relative to the choice coordinate system.

Key words: *coordinate system, aerodynamical forces, projectile, rocket, moving trajectory of projectile or rocket, ballistic tables, asymptotic decomposes.*