

УДК 623.546

В.І. Грабчак, С.В. Бондаренко, С.В. Стеців

Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ ЦЕНТРУ МАС СНАРЯДА З ГІРОСКОПІЧНОЮ СТАБІЛІЗАЦІЄЮ

В статті досліджується характер основних сил, діючих на снаряд під час руху в повітрі, в залежності від потрібної точності визначення елементів траєкторії, необхідності урахування впливу тих чи інших факторів, а також від системи координат, в якій розраховується траєкторія. Проводиться розробка та узагальнення рівнянь математичної моделі руху центру мас снаряда при дії на нього поверхових та масових сил в середовищі, що збурює.

Ключові слова: математична модель, центр мас снаряда, рівняння руху снарядів, поверхові та масові сили, системи координат, кут нутації та прецесії

Вступ

Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури. При розрахунках траєкторій польоту снарядів, що розроблюються та модернізуються, актуальним питанням є математичне моделювання, яке використовується для експериментування і чисельної оцінки параметрів руху снаряда та передбачає побудову діючої математичної моделі снаряда, яка має властивості, подібні властивостям і співвідношенням реального снаряда [1, 2]. При цьому процес руху снаряда розглядається у деякому інтервалі часу, а його стан у кожний момент часу задається набором параметрів, які характеризують його поведінку. На різних етапах дослідження математична модель може змінюватися залежно від урахування параметрів, які впливають на поведінку снаряда. Існує велика кількість математичних моделей руху снаряда в просторі, які відрізняються кількістю і характером рівнянь, що залежать від потрібної точності визначення елементів траєкторії, необхідності урахування впливу тих чи інших факторів, від системи координат (СК), в якій розраховується траєкторія, а також від припущень, покладених в основу складання математичної моделі [2, 3].

Для отримання рівнянь просторового руху снарядів рух снаряда поділяють на поступальний рух центру мас і обертальний рух навколо центру мас (ц.м.); зв'язок між ними (поступальний і обертальний, повздовжній і поперечний) визначається через реактивні та аеродинамічні сили і моменти, також враховують їх інерційний, аеродинамічний і реактивний перехресний зв'язок. Як показують теоретичні та експериментальні дослідження, поділення на поступальний рух ц.м. і

обертальний рух відносно ц.м. і поділення поступального руху ц.м. на повздовжнє і бокове дозволяють отримати практично допустиму точність розрахунків, результати яких добре узгоджуються з результатами дослідних стрільб [2, 3]. Конкретний вигляд описання процесу руху снаряда залежить від припущень, закладених до основи складання математичної моделі, обраної системи координат и системи діючих сил.

На сьогодні важливим напрямом розробки математичних моделей просторового руху снаряда є моделі, які враховують метеорологічні, балістичні і геофізичні складові головного вектора діючих поверхових та масових сил, які впливають на траєкторію польоту снаряда в проекціях на осі однієї, вибраної системи координат, що дозволяє підвищити точність розрахунків елементів траєкторії польоту снаряда.

Метою статті є розробка системи рівнянь руху ц.м. снарядів з гіроскопічною стабілізацією з урахуванням поверхових та масових сил, які діють на снаряд в польоті.

Основна частина

В якості складових головного вектора діючих сил врахуємо:

– поверхові сили, а саме складові повної аеродинамічної сили – силу лобового опору R_T та підймальну силу R_N , силу Магнуса R_L ;

– масові сили – силу Коріоліса F_K , силу тяжіння G та відцентрову силу F_B .

Для дослідження руху снаряда та визначення його положення у просторі приймемо ряд припущень, які суттєво не впливають на точність опису руху снарядів, але дозволять значно її спростити:

- снаряд в будь-який момент часу розглядається як абсолютно жорстке тіло, тобто не враховується його пружність;
- снаряд симетричний відносно поздовжньої осі інерції;
- ц.м. снаряда лежить на його геометричній вісі;
- вектор сили опору повітря лежить в площині, яка проходить через вісь снаряда та дотичну до траєкторії.

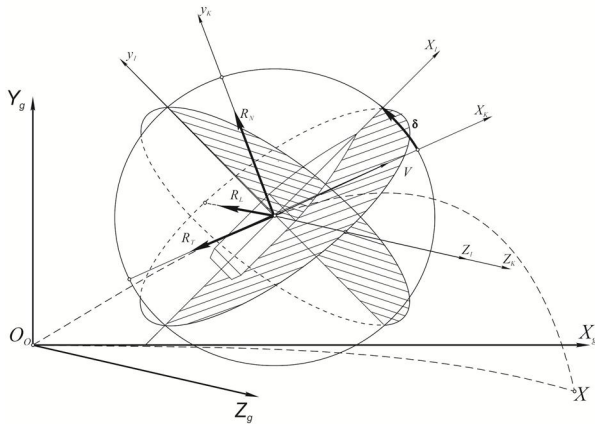


Рис. 1. Взаємна орієнтація векторів, діючих на снаряд сил

1. Розробка рівнянь руху ц.м. снаряда при дії на нього поверхових сил. В загальному випадку вектор повної аеродинамічної сили має дотичну та нормальну складові, в площині, яка проходить через дотичну до траєкторії, та віссю снаряда, та мають назву – сила лобового опору R_T та підймальна сила R_N снаряда. Не зупиняючись на природі виникнення кожної з перерахованих складових, які детально розглянуті в [4, 5], відмітимо тільки, що сила лобового опору R_T залежить від форми снаряда, швидкості і висоти його польоту, кута нутації та складається з трьох різних за своєю природою складових – донного опору, опору тертя та хвильового опору.

Під'ємна сила R_N утворюється поверхнею корпуса снаряда та залежить від величини кута нутації δ і форми снаряда.

Внаслідок тертя снаряд, що обертається, захоплює за собою частки повітря, і навколо нього утворюється циркуляційний потік, який взаємодіє з потоком повітря, що набігає, перпендикулярному осі снаряда. Відповідно, утворюється зона підвищеного тиску повітря та зона розрядження, тобто виникає різниця тиску на снаряд, що призводить до виникнення сили Магнуса R_L , яка направлена перпендикулярно площині опору снаряда. Величина сили Магнуса R_L пропорційна

швидкості руху снаряда V , кутовій швидкості обертання снаряда $\dot{\phi}$ та куту нутації δ .

Запишемо значення сил опору повітря R_T, R_N і Магнуса R_L та прийнемо, що кут δ незначний, в цьому випадку можна рахувати $\sin \delta = \delta$ і відповідно кути δ_1 і δ_2 того ж порядку малості. Розкладемо R_T, R_N, R_L у ряди за степенями кута δ навколо значення $\delta \approx 0$. Так як R_T є функція парна, тобто при зміні кута δ не змінюється, а R_N, R_L змінюють свій знак, то R_T буде розкладатися за парними, а R_N, R_L за непарними степенями кута δ :

$$R_T = (R_T)_{\delta \approx 0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 R_T}{\partial \delta^2} \right)_{\delta \approx 0} \cdot \delta^2 + \dots;$$

$$R_N = \left(\frac{\partial R_N}{\partial \delta} \right)_{\delta \approx 0} \cdot \delta + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 R_N}{\partial \delta^3} \right)_{\delta \approx 0} \cdot \delta^3 + \dots; \quad (1)$$

$$R_L = \left(\frac{\partial R_L}{\partial \delta} \right)_{\delta \approx 0} \cdot \delta + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 R_L}{\partial \delta^3} \right)_{\delta \approx 0} \cdot \delta^3 + \dots$$

Нехтуючи членами розкладання, які включають кут δ у другій і вищих степенях точності:

$$R_T = (R_T)_{\delta \approx 0};$$

$$R_N = \left(\frac{\partial R_N}{\partial \delta} \right)_{\delta \approx 0} \cdot \delta; \quad (2)$$

$$R_L = \left(\frac{\partial R_L}{\partial \delta} \right)_{\delta \approx 0} \cdot \delta.$$

Відповідно до [2] та враховуючи (2), вирази для сил R_T, R_N, R_L мають вигляд:

$$R_T = \frac{id^2 \cdot 10^3}{g} H(y) V^2 K_{R_T};$$

$$R_N = \frac{dl \cdot 10^3}{g} H(y) V^2 K_{R_N} \cdot \delta; \quad (3)$$

$$R_L = \frac{d^2 h \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) V K_{R_L} \cdot \delta,$$

де K_{R_T} – коефіцієнт сили лобового опору; K_{R_N} – коефіцієнт підймальної сили; K_{R_L} – коефіцієнт сили Магнуса; l – довжина снаряда; h – відстань між центром тиску та центром мас снаряда; g – прискорення сили вільного падіння; d – діаметр каналу ствола гармати (калібр снаряда); i – коефіцієнт форми снаряда; $H(y)$ – функція зміни щільності повітря в залежності від висоти; V – швидкість польоту снаряда; $\dot{\phi}$ – кутова швидкість власного обертання снаряда.

Рух ц.м. снаряда розглянемо в нормальній земній СК $OX_g Y_g Z_g$ та відносно Землі –

траекторній СК $OX_K Y_K Z_K$. В проєкціях на осі траекторної СК швидкість поступального руху ц.м. снаряда дорівнює $V_x = V$, $V_y = V_z = 0$. В загальному вигляді рівняння руху ц.м. снаряда запишуться:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum F_x / m; \\ V\omega_z &= \sum F_y / m; \\ V\omega_y &= -\sum F_z / m, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\sum F_i$ – проєкція суми сил, діючих на снаряд у польоті; m – маса снаряда; ω_z , ω_y – кутова швидкість обертання снаряда відповідно в площині стрільби та площині горизонту.

Визначимо проєкції кутової швидкості руху траекторної СК відносно нерухомої нормальної земної СК (рис. 2)

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta; \quad \omega_y = \dot{\psi} \cos \theta; \quad \omega_z = \dot{\theta}, \quad (5)$$

де θ – кут кидання снаряда.

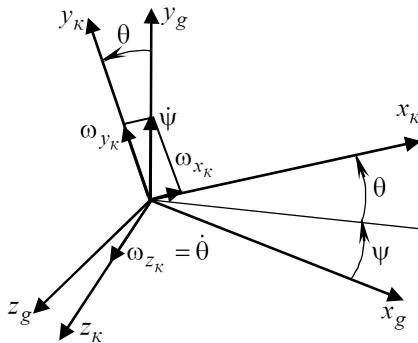


Рис. 2. Схема взаємного розташування траекторної та нормальної земної СК

Підставляючи (5) в (4), отримуємо:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum F_x / m; \\ V\dot{\theta} &= \sum F_y / m; \\ V\dot{\psi} \cos \theta &= -\sum F_z / m. \end{aligned} \quad (6)$$

Для визначення складових сил у правих частинах рівнянь (4) споектуємо на осі швидкісної СК силу тяжіння і силу опору повітря, отримуємо

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -R_T - g \sin \theta; \\ \sum F_y &= R_N \cos v + R_L \sin v - g \cos \theta; \\ \sum F_z &= R_N \sin v + R_L \cos v. \end{aligned} \quad (7)$$

Підставляючи (7) в (6), отримуємо наступні рівняння руху ц.м. снаряда:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{R_T}{m} - g \sin \theta; \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{mV} (R_N \cos v + R_L \sin v) - g \cos \theta; \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{mV} (R_N \sin v + R_L \cos v). \end{aligned} \quad (8)$$

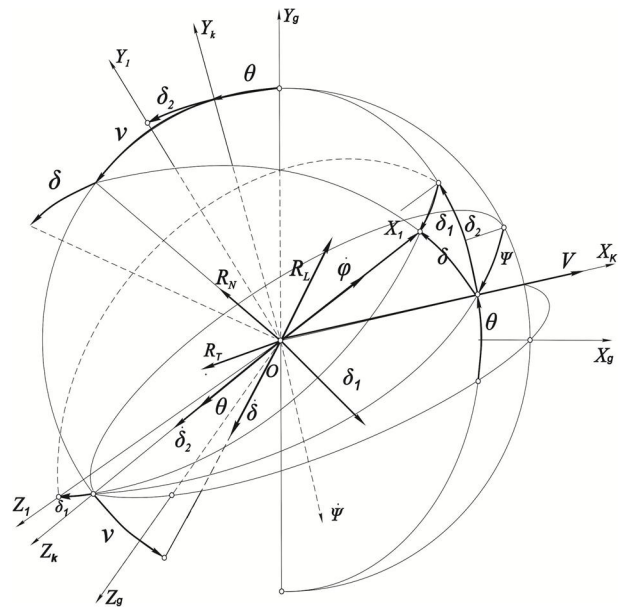
Взаємна орієнтація СК і векторів діючих на снаряд сил при просторовому русі снаряда наведена на рис. 3 а.

Крім того, прийємо сферичний трикутник зі сторонами δ_1 , δ_2 , δ (рис. 3 б) за плоский і будемо вважати

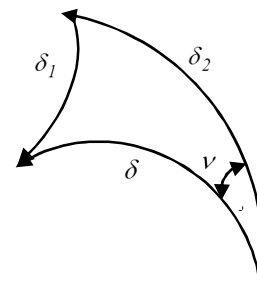
$$\delta_1 = \delta \sin v;$$

$$\delta_2 = \delta \cos v,$$

де v – кут прецесії снаряда; δ_1 , δ_2 – відповідно кути нутації у вертикальній і горизонтальній площині.



а) взаємна орієнтація діючих на снаряд поверхових сил



б) складові кути нутації снаряда

Рис. 3. Взаємна орієнтація СК та діючих на снаряд поверхових сил при просторовому русі снаряда

У цьому випадку з урахуванням (3) складові сили опору повітря R_T , R_N і сили Магнуса R_L , приймуть вигляд:

– сили лобового опору R_T :

$$\frac{1}{m} R_T = \frac{id^2 \cdot 10^3}{q} H(y) V^2 K_{R_T} = f_I; \quad (9)$$

– підйимальної сили R_N :

$$\frac{1}{mV} R_N = \frac{dl \cdot 10^3}{q} H(y) \mathcal{N}K_{R_N} \cdot \delta = f_2 \delta;$$

$$\frac{1}{mV} R_N \cos v = f_2 \delta \cos v = f_2 \delta_2;$$

$$\frac{1}{mV} R_N \sin v = f_2 \delta \sin v = f_2 \delta_1;$$

– сили Магнуса R_L :

$$\frac{1}{mV} R_L = \frac{d^2 l \cdot 10^3}{q} \varphi H(y) \mathcal{N}K_{R_L} \cdot \delta = f_3 \delta;$$

$$\frac{1}{mV} R_L \cos v = f_3 \delta \cos v = f_3 \delta_2;$$

$$\frac{1}{mV} R_L \sin v = f_3 \delta \sin v = f_3 \delta_1.$$

Підсумовуючи вищезазначене, підставляючи у (8) значення (9-11), отримаємо рівняння руху центру мас снаряда при дії на нього поверхових сил:

$$\dot{V} = -f_1 - g \sin \theta;$$

$$\dot{\theta} = f_2 \delta_2 + f_3 \delta_1 - \frac{g \cos \theta}{V};$$

$$\dot{\psi} = f_2 \delta_1 - f_3 \delta_2.$$

2. Розробка рівнянь руху центру мас снаряда при дії на нього масових сил. Як відомо, складний рух снаряда в абсолютному просторі можна представити як суму його відносного та переносного руху. Відносним вважається рух снаряда по відношенню до поверхні Землі, що обертається. Переносним рухом снаряда можна вважати його обертання сумісно із Землею з кутовою швидкістю Ω [1, 2]. Елементи траєкторії польоту снаряда розраховуються при нормальних геофізичних, балістичних і метеорологічних умовах, причому Земля вважається нерухомою. Але в дійсних умовах рух снаряда необхідно розглядати у відносній системі відліку, яка обертається разом із Землею.

Рівняння відносного руху снаряда у цьому випадку повинно складатися з урахуванням сил інерції від прискорення Коріоліса та відцентрового прискорення [2]

$$ma = \sum F_i - ma_{\text{пер}} - ma_{\text{кор}}, \quad (13)$$

де $\sum F_i$ – сума сил, які утворюють абсолютне прискорення; $ma_{\text{пер}}$ – відцентрова сила F_B ; $ma_{\text{кор}}$ – сила Коріоліса $F_{\hat{E}}$.

Численні розрахунки і практичні стрільби показали, що відхилення точок падіння, які обумовлені впливом сили обертання Землі, різко зростають зі збільшенням дальності стрільби і мають відхилення як за дальністю, так і за боковим напрямком. Величина сили Коріоліса визначається залежністю [1, 2, 6]

$$F_K = 2mV\Omega \sin\left(\hat{V} \Omega\right), \quad (14)$$

де m – маса снаряда; V – швидкість руху снаряда відносно системи координат, яка обертається разом з Землею; Ω – кутова швидкість обертання Землі; $\hat{V} \Omega$ – кут між віссю обертання Землі і напрямком вектора швидкості снаряда.

При стрільбі вздовж меридіана, коріолісова сила на дальність польоту снаряда не впливає, вплив здійснюється тільки на бокове відхилення снаряда, на екваторіальних траєкторіях польоту – призводить тільки до відхилення за дальністю. При більш загальному сполученні широти точки старту і азимута стрільби коріолісова сила буде мати як нормальну складову в площині стрільби, так і бокову складову, перпендикулярну площині стрільби. Нормальна складову змінює дальність польоту снаряда, а бокова впливає на напрямок польоту, тобто вплив обертання Землі на політ снаряда призводить до відхилення точки падіння як за дальністю, так і за напрямком.

Для визначення впливу сили Коріоліса на дальність і напрямок польоту снаряда його рух розглянемо в нормальній земній СК $Ox_g Y_g Z_g$ та відносно Землі – траєкторній СК $Ox_k Y_k Z_k$.

Траєкторна СК при суміщенні координат осі OY_k , яка проходить через ц.м. снаряда, що рухається, обертається в просторі відносно нормальної земної СК, які зв'язані із Землею, відповідно до цього маємо [2]

$$\frac{dV_k}{dt} = \frac{d^* V_k}{dt} + \omega \times V_k, \quad (15)$$

де $\frac{d^* V_k}{dt}$ – локальна похідна вектора V_k в траєкторній СК; ω – вектор кутової швидкості обертання траєкторних координат відносно земних.

Підставляючи (15) до (13), отримаємо

$$m \left(\frac{d^* V_k}{dt} + \omega \times V_k \right) = \sum F - ma_{\text{пер}} - ma_{\text{кор}}. \quad (16)$$

Вектор кутової швидкості траєкторної СК відносно нормальної земної визначається сумою векторів кутових швидкостей

$$\omega = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\lambda} + \dot{\phi},$$

де $\dot{\lambda}$ та $\dot{\phi}$ – вектори кутових швидкостей зміни довготи та широти, які визначають положення ц.м. снаряда у сферичних геоцентричних координатах; $\dot{\psi}$ та $\dot{\theta}$ – вектори похідних за часом кута ризику та кута кидання.

Зв'язок кутової координати φ_{Γ} з віссю OY_g для випадку, коли площина OX_gY_g нормальних земних координат проходить через вісь обертання Землі, наданий на рис. 4.

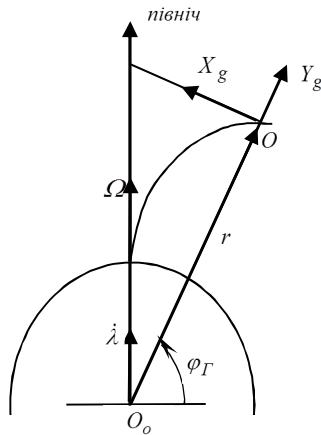


Рис. 4. Схема взаємного розташування осей OX_g і OY_g та векторів Ω і $\dot{\lambda}$

Проекції кутових швидкостей на осі траєкторної СК визначимо у відповідності з [2]. Вектор кутової швидкості визначимо через його складові, які мають напрямок за нормальними земними осями, наступним чином

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda} (X_g^0 \cos \varphi_{\Gamma} + Y_g^0 \sin \varphi_{\Gamma}), \quad (17)$$

де X_g^0, Y_g^0 – одиничний вектор (орт); φ_{Γ} – геоцентрична широта.

Маючи на увазі, що вектор $\dot{\varphi}_{\Gamma}$ перпендикулярний площині кута φ_{Γ} , отримаємо

$$\dot{\varphi}_{\Gamma} = -Z_g^0 \varphi_{\Gamma}.$$

Використовуючи матрицю переходу від нормальної земної СК до траєкторної (табл.) [2], запишемо вирази для векторів $\dot{\lambda}$ та $\dot{\varphi}_{\Gamma}$ через їх складові, які мають напрямок за осями траєкторної СК:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = & \dot{\lambda} [X_{\kappa}^0 (\cos \varphi_{\Gamma} \cos \psi \cos \theta + \sin \varphi_{\Gamma} \sin \theta) + \\ & + Y_{\kappa}^0 (-\cos \varphi_{\Gamma} \cos \psi \sin \theta + \sin \varphi_{\Gamma} \cos \theta) + \\ & + Z_{\kappa}^0 (\cos \varphi_{\Gamma} \sin \psi)]; \quad (18) \\ \dot{\varphi}_{\Gamma} = & -\dot{\varphi}_{\Gamma} [X_{\kappa}^0 (-\sin \psi \sin \theta) + Y_{\kappa}^0 (\sin \psi \sin \theta) + \\ & + Z_{\kappa}^0 \cos \psi]. \end{aligned}$$

Таблиця
Матриця переходу від нормальної земної до траєкторної СК

Осі координат	OX_{κ}	OY_{κ}	OZ_{κ}
OX_g	$\cos \psi \cos \theta$	$\sin \theta \cos \psi$	$\sin \psi$
OY_g	$\sin \theta$	$\cos \theta$	0
OZ_g	$-\cos \theta \sin \psi$	$\sin \theta \sin \psi$	$\cos \psi$

Проекції коріолісової сили на осі траєкторної СК визначимо із співвідношення

$$m a_{\text{кор}} = 2m(\Omega \times V_{\kappa}) = 2m \begin{vmatrix} X_{\kappa}^0 & Y_{\kappa}^0 & Z_{\kappa}^0 \\ \Omega_{X_{\kappa}} & \Omega_{Y_{\kappa}} & \Omega_{Z_{\kappa}} \\ V_{\kappa} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (19)$$

де Ω_i – проекція вектора кутової швидкості обертання Землі на осі траєкторної СК.

Виходячи з того, що напрямки векторів Ω та $\dot{\lambda}$ співпадають (рис. 4), з урахуванням (17) визначимо проекції вектора Ω на вісі траєкторної СК

$$\Omega = \Omega [X_{\kappa} (\cos \varphi \cos \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) + Y_{\kappa} (-\cos \varphi \cos \psi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta) + Z_{\kappa} (\cos \varphi \sin \psi)].$$

Враховуючи, що $V_{KY_{\kappa}} = V_{KZ_{\kappa}} = 0$ і відповідно, проекції коріолісової сили на осі траєкторної СК дорівнюють:

$$\begin{aligned} m a_{\text{кор}x_{\kappa}} &= 0; \\ m a_{\text{кор}y_{\kappa}} &= 2V_{\kappa} \Omega_{Z_{\kappa}} = 2V_{\kappa} \Omega \cos \varphi \sin \psi; \\ m a_{\text{кор}z_{\kappa}} &= 2V_{\kappa} \Omega_{Y_{\kappa}} = \\ &= 2V_{\kappa} \Omega (\cos \varphi \cos \psi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta). \end{aligned} \quad (20)$$

При написанні правих частин рівнянь (4) додатково врахуємо силу тяжіння, яка залежить від висоти та географічної широти польоту снаряда. Для тіла сферичної структури сила тяжіння G на рівні Землі може бути представлена як геометрична сума гравітаційної сили $F_{\Gamma P}$ і відцентрової сили інерції F_B , яка є наслідком обертання Землі

$$G = F_{\Gamma P} + F_B \quad (21)$$

Так як маса снаряда під час польоту є незмінною, змінюється величина прискорення вільного падіння, яке складається з прискорення гравітаційної сили та прискорення відцентрової сили, яке утворене радіус-вектором r і вектором Ω (див. рис. 3). Позначимо прискорення вільного падіння відповідно як [2], отримаємо:

$$\begin{aligned} g_r &= g_{Tr} + \Omega^2 r; \\ g_{\Omega} &= g_{T\Omega} - \Omega^2 r \sin \varphi_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Для переходу до траєкторної СК скористуємося формулою (18), отримаємо:

$$\begin{aligned} g_{X_K} &= -g_r \sin \theta - g_{\Omega} \times \\ &\quad \times (\cos \varphi_{\Gamma} \cos \psi \cos \theta + \sin \varphi_{\Gamma} \sin \theta); \\ g_{Y_K} &= -g_r \cos \theta - g_{\Omega} \times \\ &\quad \times (-\cos \varphi_{\Gamma} \cos \psi \sin \theta + \sin \varphi_{\Gamma} \cos \theta). \end{aligned} \quad (22)$$

Підставляючи (20, 22) в (12), отримуємо:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -f_1 \delta - g_{X_K} \sin \theta; \\ \dot{\theta} &= f_2 \delta_2 + f_2 \delta_1 - \frac{g_{Y_K} \cos \theta}{V} - 2\Omega \cos \varphi \sin \Psi; \\ \dot{\psi} &= f_3 \delta - f_3 \delta_2 + 2\Omega (\cos \varphi \cos \psi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta). \end{aligned} \quad (23)$$

До виведених трьох рівнянь (23) додамо рівняння, які визначають швидкість ц.м. снаряда в траєкторній СК:

$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= V \cos \theta \cos \psi \sin \theta; \\ \dot{y}_K &= -V \sin \theta; \\ \dot{z}_K &= V \cos \theta \sin \psi; \\ r &= \sqrt{\dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2 + \dot{z}_K^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким чином, рівняння руху ц.м. снаряда в проекціях на осі траєкторної СК з урахуванням дії аеродинамічної сили R_T, R_N , сили Магнуса R_L , сили Кориоліса F_K та сили тяжіння G запишуться у вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{V} &= -f_1 \delta - g_{X_K} \sin \theta; \\ \dot{\theta} &= f_2 \delta_2 + f_2 \delta_1 - \frac{g_{Y_K} \cos \theta}{V} - 2\Omega \cos \varphi \sin \Psi; \\ \dot{\psi} &= f_3 \delta - f_3 \delta_2 + \\ &\quad + 2\Omega (\cos \varphi \cos \psi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta); \\ \dot{x}_K &= V \cos \theta \cos \psi \sin \theta; \\ \dot{y}_K &= -V \sin \theta; \\ \dot{z}_K &= V \cos \theta \sin \psi; \\ r &= \sqrt{\dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2 + \dot{z}_K^2}. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Отримана математична модель без введення додаткових спрощень не інтегрується. Це пояснюється тим, що опір середовища, в якому відбувається рух, не може бути представлений у вигляді аналітичної залежності, так як функції виражають повну аеродинамічну силу і зміна щільності повітря з висотою задається, як правило, у вигляді таблиці чи графічно. При наявності підінтегральної функції, що не має простого

аналітичного виразу, розділення змінних не є можливим, і виникає необхідність у застосуванні наближених методів. Виходячи з цього для рішення математичної моделі запропоновано застосування методів чисельного інтегрування.

Математична модель польоту снарядів реалізована програмно на основі стандартної підпрограми чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, написаною в програмному середовищі Maple.

Висновки

У статті наведена система рівнянь руху ц.м. снарядів з гіроскопічною стабілізацією. В якості складових головного вектора діючих сил враховано поверхові сили, а саме складові повної аеродинамічної сили – силу лобового опору та підймальну силу, силу Магнуса; масові сили – силу Кориоліса, силу тяжіння та відцентрову силу.

Розроблена математична модель руху ц.м. снаряда в просторі та її програмний макет, дозволяє проводити:

- розрахунки основних поправочних граф Таблиць стрільби як існуючих, так і перспективних снарядів, для різних нарізних ствольних артилерійських систем;

- дослідження руху центру з метою розрахунку елементів траєкторії польоту снаряда.

Подальшим напрямом досліджень є розробка системи рівнянь руху снарядів з гіроскопічною стабілізацією відносно його ц.м та перевірка адекватності отриманої математичної моделі просторового руху.

Список літератури

1. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лисенко. – М.: Машиностроение, 2005. – 607 с.
2. Лисенко В.М. Теорія польоту / В.М. Лисенко, В.І. Грабчак, Д.А. Новак. – Суми: СумДУ, 2006. – 203 с.
3. Равдин И.Ф. Внешняя баллистика неуравляемых ракет и снарядов / И.Ф. Равдин. – МО: Воениздат, 1973. – 184 с.
4. Аржаников Н.С. Аэродинамика летательных аппаратов / Н.С. Аржаников, Г.С. Садекова. – М.: Высшая школа, 1983. – 359 с.
5. Липницький Ю.М. Аэродинамика баллистического полета / Ю.М. Липницький, А.В. Красильников, А.Н. Покровский, В.Н. Шманенков [Под ред. Липницького Ю.М.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с.
6. Грабчак В.І. Дослідження впливу обертання Землі на політ снарядів / В.І. Грабчак, Б.О. Попков. – Труды университета: зб. наук. праць. – Київ: НУОУ. – 2013. – Вип. 3. (117). – С. 130-138.

Рецензент: д.т.н., проф. Сопільник Л.І., Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС СНАРЯДА С ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИЕЙ

В.И. Грабчак, С.В. Бондаренко, С.В. Стецив

В статье исследуется характер основных сил, действующих на снаряд во время движения в воздухе, в зависимости от необходимой точности определения элементов траектории, необходимости учета влияния тех или других факторов, а также от системы координат, в которой рассчитывается траектория. Проводится разработка и обобщение уравнений математической модели движения центра масс снаряда при воздействии на него поверхностных и массовых сил в возмущенной среде.

Ключевые слова: математическая модель, центр масс снаряда, уравнение движения снарядов, поверхностные и массовые силы, системы координат, углы нутации и прецессии.

MATHEMATICAL MODEL OF MOVEMENT OF CENTER OF SHELL MASS WITH HYDROSCOPIC STABILIZATION

V. Hrabchak, S. Bondarenko, S. Stetsiv

The article researches the character of main forces that have their impact on a shell during the movement in the air, depending on the necessary accuracy of determination of elements of trajectory, necessity of consideration of influences of one or another factors, and also depending on a system of coordinates where the trajectory is calculated. It also conducts the elaboration and generalization of equations of mathematical model of movement of center of shell mass during the influence of surface and mass forces on it in the disturbed environment.

Key words: mathematical model, center of shell mass, equations of shell movement, surface and mass forces, system of coordinates, angles of nutation and precession.

УДК 623.546

В.І. Грабчак, Є.Г. Іваник

*Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів***ЗАСТОСУВАННЯ АПРОКСИМАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДО ІДЕНТИФІКАЦІЇ ФУНКЦІЇ ЛОБОВОГО ОПОРУ СНАРЯДА**

Розвинуто науковий підхід до відновлення функції лобового опору снаряда за умови отримання неповної інформації, який заснований на апроксимації їх одиничними функціями Гевісайда. Визначення невідомих коефіцієнтів функції лобового опору передбачає співставлення двох траєкторій: в безповітряному просторі (опорна траєкторія) і в атмосферних умовах (реальна траєкторія). Отримані розрахункові залежності для знаходження коефіцієнтів, які ідентифікують функцію лобового опору, виражені через компоненти заданого вектора нев'язок. На основі числових розрахунків сформовано таблиці значень елементів реальної та опорної траєкторій і коефіцієнтів функції лобового опору в дискретні моменти часу, які відповідають вузлам розбиття тривалості польоту снаряда. За отриманими числовими значеннями запропоновано емпіричний вираз функції опору повітря.

Ключові слова: математичне моделювання, артилерійський снаряд, апроксимаційні методи, функція лобового опору, рівняння руху, опорна траєкторія руху, модифікована парабола, задача Коші, однокроковий метод Ейлера-Коші.

Вступ

Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури. Складанню таблиць стрільби і проектуванню артилерійських систем передують значний обсяг балістичних розрахунків, спрямованих

на визначення елементів траєкторії польоту снарядів. Рух снаряда в атмосфері в основному визначається дією двох сил: сили тяжіння і сили опору повітря. Якщо притримуватись гіпотези про нехтування більшістю несуттєвих аеродинамічних факторів, то в рамках динаміки абсолютно твердого