УДК 621.396.96

В.І. Грабчак, П.І. Ванкевич, Є.Г. Іваник

Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ОПИСУ РУХУ "ІДЕАЛЬНОЇ" РАКЕТИ У ВЕРТИКАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

На основі постановки варіаційної задачі Больца розглянуто рух "ідеальної" ракети у вертикальній площині, яка є модифікацією класичної задачі про брахістохрону. Отримано аналітична залежність, яка характеризує кінематичні характеристики руху "ідеальної" ракети у вертикальній площині; виявлено особливості шляху найменшого часу.

Ключові слова: *ракета, сила тяжіння, реактивна сила, шлях найменшого часу, варіаційне числення, траєкторія ракети.*

Вступ

Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури. Варіаційне числення тісно пов'язане із застосуванням математики до механіки, фізики, інженерної справи, чисельного аналізу і до інших галузей спеціального призначення, однією з яких є дослідження руху артилерійського снаряда або керованого ракетного пристрою в атмосфері [1-4]. Постійно виникають у практиці проблемні задачі, в зв'язку з чим варіаційне числення продовжує бути об'єктом нових досліджень.

Сучасна балістика вивчає широке коло питань, пов'язаних з вибором раціональних траєкторій руху літальних апаратів. Детальний аналіз основ сучасної теорії польоту викладено у великій кількості джерел, серед яких у першу чергу слід відзначити [5-8].

У працях [9-12], виконаних групою українських вчених, розроблено математичну модель руху літального апарата, яка базується на системі диференціальних рівнянь та відповідному оптимальному виборі системи сил і моментів, що впливають на політ снаряда, виконано дослідження впливу параметрів роботи реактивного двигуна реактивних снарядів, причому враховується вплив зміни одиничного імпульсу тяги і часу роботи двигуна.

Зрозуміло, що постановка задач, які виникають у процесі вирішення задач, такої практично важливої науки, як зовнішня балістика, не може оминути такий потужний і ефективний інструментарій, який надає інженеру-досліднику варіаційне числення. Існуючі варіаційні теорії достатньо загальні, причому однією з суттєвих переваг варіаційних методів є їх інваріантний характер і відповідно їх незалежність від вибраної для опису явища системи координат.

Розглянемо модифікацію відомої з варіаційного числення задачі про брахістохрону [3, 4], яка описує рух "ідеальної" ракети у вертикальній площині. Ідеалізація ракети як об'єкта полягає у її моделюванні частинкою, на яку діють сили тяжіння g і реактивна сила сталої величини F зі змінним кутом нахилу φ (рис. 1).

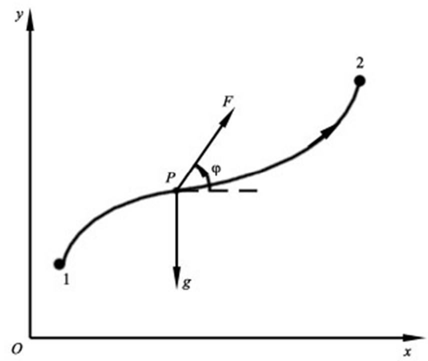

Рис. 1. **Модифікація задачі про лінію найменшого часу: задача про рух "ідеальної" ракети**

Припускається, що на ракету жодні інші сили не діють. Керування ракетою здійснюється зміною кута φ, тобто зміною напрямку реактивної сили.

Метою статті є знаходження шляху найменшого часу руху "ідеальної" ракети у вертикальній площині за відповідних початкових і кінцевих умов.

Основна частина

Аналітично модель руху "ідеальної" ракети у вертикальній площині зводиться до відшукання серед усіх функцій

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$
$$0 \le t \le T,$$

пов'язаних співвідношеннями (рівняння руху за умови одиничної маси)

$$\ddot{x} = F\cos\varphi,$$
$$\ddot{y} = F\sin\varphi - g$$

і визначеними значеннями кінематичних характеристик $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ при $t = 0$ і $t = T$.

Більшість задач, які виникають із потреб практики, не завжди можна вписати в рамки існуючих класичних постановок, але досить значна їх кількість є частковим випадком дуже загальної задачі, яка відома в літературі як задача Больца [4]. Ця задача може бути сформульованою декількома способами, які на перший погляд є цілком різні. Викладемо одне з найбільш адаптованих до більшості практичних задач формулювань: розглядається клас кривих, координати

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{r+n}$$

точок яких визначаються рівняннями

$$w_h = a_h,\ w_{r+i} = y_i(x),\ x_1 \le x \le x_2;$$

$$h = 1,\ldots,r,\ i = 1,\ldots,n$$

(перші r координат – деякі сталі); на ці криві накладаються обмеження

$$\varphi_j(a, x, y, y') = 0,\ j = 1,\ldots, m < n,$$

$$I_k = g_k[a, x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)] + \int_{x_1}^{x_2} f_k(a, x, y, y')\,dx = 0,$$

$$k = 1,\ldots, p$$

де $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$; задача полягає у відшуканні кривої з цього класу, яка мінімізує функціонал

$$I = g[a, x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)] + \int_{x_1}^{x_2} f(a, x, y, y')\,dx = 0;$$

сформульовану таким чином задачу назвемо задачею типу А.

Друге формулювання проблеми Больца, яка також часто використовується у багатьох практичних застосуваннях, полягає в наступному: розглядається клас кривих, координати точок яких

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{r+n+m}$$

визначаються функціями

$$w_h = a_h,\ w_{r+i} = y_i(x),\ w_{r+n+j} = \theta_j(x),$$

$$x_1 \le x \le x_2;$$

$$h = 1,\ldots,r,\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m$$

які задовольняють умовам

$$y_i' = P_i(a, x, y, \theta),$$

$$x_s = X_s(a),\ y_i(x_s) = Y_{is}(a),\ s = 1,2;$$

$$I_k = g_k(a) + \int_{x_1}^{x_2} f_k(a, x, y, y', \theta)\,dx = 0,\ k = 1,\ldots, p;$$

задача полягає у мінімізації функціонала

$$I = g(a) + \int_{x_1}^{x_2} f(a, x, y, y', \theta)\,dx = 0;$$

назвемо сформульовану задачу задачею В.

Еквівалентність цих задач можна знайти у класичних працях з варіаційного числення [4, 5]. Для практичного застосування наведених формулювань надзвичайно важливим є встановлення необхідної умови мінімуму для задач А і В. Ці результати мають місце за деяких досить слабких припущень.

Перша необхідна умова для задачі А. Для мінімізуючої кривої C існують функції

$$F = \lambda_0 f + \lambda_k f_k + \mu_j(x)\varphi_j,$$

$$G = \lambda_0 g + \lambda_k g_k,$$

які а) множники $\lambda_0 \ge 0$, λ_k – постійні;

б) величини $F - y_i' F_{y_i'}$ та $F_{y_i'}$ неперервні вздовж кривої C, а між кутовими точками цієї кривої виконуються рівняння Ейлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dx}\left(F - y_i' F_{y_i'}\right) = F_x,$$

$$\frac{d}{dx} F_{y_i'} = F_{y_i},$$

$$\varphi_j = 0;$$

в) кінцеві точки 1 і 2 кривої C такі, що рівність

$$\left(F - y_i' F_{y_i'}\right)dx + F_{y_i'}\,dy_i\Big|_1^2 + dG + \int_{x_1}^{x_2} F_{a_h}\,da_h\,dx = 0$$

виконується тотожньо для диференціальних членів dx_1, dy_{i1}, dx_2, dy_{i2}, da_h.

Перша необхідна умова для задачі В. Першу необхідну умову для задачі В можна сформулювати у дещо іншій формі. У цьому разі вводиться функція H, яка є аналогом гамільтоніана [4]; отже, для мінімізуючої дуги C існують функції

$$H = \lambda_0 f + \lambda_k f_k + z_i(x) P_i,$$

$$G = \lambda_0 g + \lambda_k g_k,$$

для яких

а) множники $\lambda_0 \ge 0$, λ_k – постійні;

б) функції H і z_i неперервні вздовж кривої C, а між кутовими точками цієї кривої мають місце рівняння Ейлера–Лагранжа

$$\frac{dH}{dx} = H_x,\ \frac{dy_i}{dx} = H_{z_i},$$

$$\frac{dz_i}{dx} = -H_{y_i},\ H_{\theta_j} = 0;$$

в) кінцеві точки 1 і 2 кривої C такі, що має місце рівність

$$\left[H X_{sh} - z_i Y_{ish}\right]_{s-1}^{s=2} + G_h + \int_{x_1}^{x_2} H_h\,dx = 0,$$

причому нижній індекс h позначає часткові похідні по параметрах a_h.

Неважко бачити, що постановка задачі про рух "ідеальної" ракети є частковим випадком задачі типу В; а саме, якщо ототожнити змінні t, x, y, $\dot{x}$,

$\dot{y}$, які ми ввели у формулюванні задачі про рух ракети, зі змінними t, y_1, y_2, y_3, y_4, то задача зведеться до відшукання кривої, яка мінімізує інтеграл в класі кривих

$$y_i = y_i(t),\ \varphi = \varphi(t),$$
$$t_1 \le t \le t_2,\ i = 1,2,3,4,$$

що задовольняють умовам

$$\dot{y}_1 = y_3,\ \dot{y}_2 = y_4,$$
$$\dot{y}_3 = F\cos\varphi,\ \dot{y}_4 = F\sin\varphi - g,$$
$$t_1 = 0,\ t_2 = T,\ y_i(t_s) = Y_{is},\ s = 1,2.$$

Тут величини Y_{is} сталі. У цьому випадку маємо

$$H = z_1 y_3 + z_2 y_4 + z_3 F\cos\varphi + z_4(F\sin\varphi - g).$$

З вказаної умови В отримуємо залежності

$$\frac{dH}{dt} = 0,\ \frac{dz_1}{dt} = 0,$$
$$\frac{dz_2}{dt} = 0,\ \frac{dz_3}{dt} = -z_1,$$
$$\frac{dz_4}{dt} = -z_2,\ H_\varphi = -F\sin\varphi + F\sin\varphi = 0.$$

Повертаючись до попередніх (реальних кінематичних) змінних і замінюючи z_3, z_4 на u, v, видно з цих рівнянь, що

$$\begin{aligned} u &= at + b = p\cos\varphi, \\ v &= ct + d = p\sin\varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

$$H = \dot{u}\dot{x} + \dot{v}\dot{y} + u\ddot{x} + v\ddot{y} = \frac{d}{dt}(u\dot{x} + v\dot{y}) = h, \tag{2}$$

де a, b, c, d, h є сталі, а множник p – множник пропорційності.

Згідно з рівнянням (2) отримуємо співвідношення

$$u\dot{x} + v\dot{y} = ht + k,$$

яке фактично містить інформацію відносно швидкості "ідеальної" ракети. Звідси вже неважко простим інтегруванням отримати траєкторію руху ракети, вираженої у неявному вигляді.

Висновки

У статті на основі постановки варіаційної задачі Больца розглянуто рух "ідеальної" ракети у вертикальній площині, яка по суті є модифікацією класичної задачі про брахістохрону (екстремальної задачі про швидкодію). Ідеалізація полягає у тому, що ракета вважається частинкою, на яку діють сила тяжіння і реактивна сила зі змінним кутом нахилу. Отримано залежність, яка характеризує кінематичні характеристики "ідеальної" ракети. Виявлено особливості шляху найменшого часу. На основі отриманих залежностей показується, що шлях найменшого часу володіє такою цікавою властивістю: існує певним чином направлена в просторі і розміщена відносно ракети пряма, яка має таку властивість, що якщо деяка точка буде рухатись вздовж цієї прямої зі сталою швидкістю, а реактивна сила, яка дії на ракету, буде постійно направлена в дану точку, то ракета буде рухатись по шляху найменшого часу. Розв'язок отримано для спрощеного руху, в умовах якого на "ідеальну" ракету діє лише обмежена кількість силових факторів.

Подальшим напрямом досліджень є застосування апарату варіаційного числення в задачах руху літальних апаратів з урахуванням чинників, які описуватимуть їх поведінку в щільних шарах атмосфери, де суттєвий вплив матимуть силові фактори, пов'язані з метеорологічними умовами.

Список літератури

1. *Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. Пер. с франц.; Под ред. К. С. Шифрина / А. Анго – М.: Наука, 1965. – 779 с.*
2. *Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974. – 432 с.*
3. *Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). Ч. II. Применение некоторых методов математического и функционального анализа: учеб. пособие для втузов / А.В. Ефимов. – М.: Высш. школа, 1980. – 295 с.*
4. *Мышкис А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1971.– 632 с.*
5. *Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лисенко. – М.: Машиностроение, 2005. – 607 с.*
6. *Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов / Ю.Г. Сихарулидзе. – М.: Наука, 1982. – 352 с.*
7. *Внешняя баллистика. Кн. 1. – М.: ВАИА им. Дзержинского, 1954. – 463 с.*
8. *Внешняя баллистика. Кн. 2. – М.: ВАИА им. Дзержинского, 1954. – 496 с.*
9. *Лисенко В.М. Теорія польоту / В.М. Лисенко, В.І. Грабчак, Д.А. Новак. – Суми: СумДУ, 2006. – 203 с.*
10. *Грабчак В.І. Розробка векторно-матричних моделей польоту снарядів / В.І. Грабчак, Б.О. Попков // Військово-технічний збірник. – Львів: АСВ. – 2013. – Вип. 1. (8). – С. 16-21.*
11. *Макеев В.И. Исследование влияния параметров работы реактивного двигателя на дальность и кучность стрельбы реактивних снарядов / В.И.Макеев, В.И. Грабчак, П.Е. Трофименко, Ю.И. Пушкарев // Системы обработки информации. – 2008. – Вип. 6(73). – С.77-81.*
12. *Макеєв В.І. Розрахунок дериваційного відхилення літальних апаратів, що обертаються / В.І. Макеєв, В.І. Грабчак, П.Є. Трофименко, Ю.І. Пушкарьов // Системи управління, навігації та зв'язку. – Київ: ЦНДІНіУ, 2008. – Вип. 3(7). – С. 116-119.*

Рецензент: д.т.н., проф. Сопільник Л.І., Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів.

Применение методов вариационного исчисления к описанию движения “идеальной” ракеты в вертикальной плоскости

В.И. Грабчак, П.И. Ванкевич, Е.Г. Иваник

На основании постановки вариационной задачи Больца рассмотрено движение “идеальной” ракеты в вертикальной плоскости, которое есть модификацией классической задачи о брахистохроне. Получена аналитическая зависимость, которая характеризирует кинематические характеристики движения “идеальной” ракеты в вертикальной плоскости; выявлено особенности пути наименьшего времени.

Ключевые слова: *ракета, сила тяжести, реактивная сила, путь наикратчайшего времени, вариационное исчисление, траектория ракеты.*

Applying methods of variational calculus to description of moving “ideal” rocket in vertical plane

V. Hrabchak, P. Vankevych, Y. Ivanyk

Movement of the “ideal” rocket in the vertical plane on the basis of Bolz variational problem set up has been considered which is modification of classical problem of brachistichrone. Analytical dependence which characterizes kinematics of “ideal” rocket in the vertical plane movement has been obtained; peculiarities of the basic time way have been discovered.

Key words: *rocket, gravity, jet power, basic time way, variational calculus, rocket trajectory.*

681.3(0.75)

Г.П. Гречка[1], В.М.Корольов[2]

[1] *Київський політехнічний інститут, Київ*
[2] *Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів*

ОЦІНКА ПОХИБКИ ВИЗНАЧЕННЯ АЗИМУТА САМООРІЄНТОВНОЮ БІНС ПРИ ДІЇ НА НЕЇ ВИПАДКОВОЇ ХИТАВИЦІ

Виконана оцінка похибки визначення азимута самоорієнтовною безплатформною інерціальною навігаційною системою (БІНС) на лазерних гіроскопах при дії на неї випадкової хитавиці. Результати отримані без накладання будь-яких обмежень на сигнали лазерних гіроскопів, мають загальний характер, тому можуть бути поширені на БІНС, побудованих на інших типах гіроскопів: оптичних, волоконно-оптичних, динамічно-настроюваних, мікромеханічних та інших.

Ключові слова: *самоорієнтовна безплатформна інерціальна навігаційна система, аналітичне гірокомпасування, випадкова хитавиця, лазерний гіроскоп, лінійний акселерометр, середньоквадратична похибка.*

Вступ

У сучасній навігаційній техніці широкого розповсюдження набули безплатформні інерціальні навігаційні системи (БІНС), інерціальні блоки чутливих елементів (ЧЕ) яких побудовані на ортогональних тріадах гіроскопів і акселерометрів. У високоточних БІНС як вимірювачі кутових швидкостей широкого застосовування набули, переважно, лазерні гіроскопи (ЛГ).

Принципи побудови БІНС достатньо глибоко викладені в підручнику [1]. У процесі функціонування БІНС важливе місце займає процедура початкової виставки, яка полягає у введені в обчислювач системи початкових навігаційних координат (широти, довготи та висоти) і параметрів кутової орієнтації – кутів тангажа, крену та азимута (курсу).

У цій статті розглядаються питання автономної виставки БІНС по кутових координатах. Серед них вирішальна роль належить виставці в горизонтальній