Применение методов вариационного исчисления к описанию движения "идеальной" ракеты в вертикальной плоскости

В.И. Грабчак, П.И. Ванкевич, Е.Г. Иваник

На основании постановки вариационной задачи Больца рассмотрено движение "идеальной" ракеты в вертикальной плоскости, которое есть модификацией классической задачи о брахистохроне. Получена аналитическая зависимость, которая характеризирует кинематические характеристики движения "идеальной" ракеты в вертикальной плоскости; выявлено особенности пути наименьшего времени.

Ключевые слова: *ракета, сила тяжести, реактивная сила, путь наикратчайшего времени, вариационное исчисление, траектория ракеты.*

Applying methods of variational calculus to description of moving "ideal" rocket in vertical plane

V. Hrabchak, P. Vankevych, Y. Ivanyk

Movement of the "ideal" rocket in the vertical plane on the basis of Bolz variational problem set up has been considered which is modification of classical problem of brachistichrone. Analytical dependence which characterizes kinematics of "ideal" rocket in the vertical plane movement has been obtained; peculiarities of the basic time way have been discovered.

Key words: *rocket, gravity, jet power, basic time way, variational calculus, rocket trajectory.*

681.3(0.75)

Г.П. Гречка[1], В.М.Корольов[2]

[1]*Київський політехнічний інститут, Київ*
[2]*Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів*

ОЦІНКА ПОХИБКИ ВИЗНАЧЕННЯ АЗИМУТА САМООРІЄНТОВНОЮ БІНС ПРИ ДІЇ НА НЕЇ ВИПАДКОВОЇ ХИТАВИЦІ

Виконана оцінка похибки визначення азимута самоорієнтовною безплатформною інерціальною навігаційною системою (БІНС) на лазерних гіроскопах при дії на неї випадкової хитавиці. Результати отримані без накладання будь-яких обмежень на сигнали лазерних гіроскопів, мають загальний характер, тому можуть бути поширені на БІНС, побудованих на інших типах гіроскопів: оптичних, волоконно-оптичних, динамічно-настроюваних, мікромеханічних та інших.

Ключові слова: *самоорієнтовна безплатформна інерціальна навігаційна система, аналітичне гірокомпасування, випадкова хитавиця, лазерний гіроскоп, лінійний акселерометр, середньоквадратична похибка.*

Вступ

У сучасній навігаційній техніці широкого розповсюдження набули безплатформні інерціальні навігаційні системи (БІНС), інерціальні блоки чутливих елементів (ЧЕ) яких побудовані на ортогональних тріадах гіроскопів і акселерометрів. У високоточних БІНС як вимірювачі кутових швидкостей широкого застосовування набули, переважно, лазерні гіроскопи (ЛГ).

Принципи побудови БІНС достатньо глибоко викладені в підручнику [1]. У процесі функціонування БІНС важливе місце займає процедура початкової виставки, яка полягає у введені в обчислювач системи початкових навігаційних координат (широти, довготи та висоти) і параметрів кутової орієнтації – кутів тангажа, крену та азимута (курсу).

У цій статті розглядаються питання автономної виставки БІНС по кутових координатах. Серед них вирішальна роль належить виставці в горизонтальній площині – по азимуту. Інерціальні системи, які здійснюють цю процедуру автономно й автоматично, прийнято називати самоорієнтовними [2]. Визначення кутів тангажа й крену в БІНС здійснюється за допомогою акселерометрів (Акс), які входять в одну із тріад ЧЕ БІНС. Детальну методику визначення цих кутів по сигналах Акс можна знайти в роботі [3].

Що стосується виставки в азимутальній площині, то ця процедура значно складніша й вимагає окремих підходів, особливо коли вона стосується БІНС. Вона значно ускладнюється при аналізі її під впливом дії на БІНС випадкової хитавиці та інших збурень, які ведуть до зміни положення осей чутливості вимірювачів (ЛГ і Акс) відносно площини горизонту. Ці питання недостатньо розкриті в літературі з навігації. Слід відзначити навчальний посібник [4], який цілком присвячений завданням кутової орієнтації БІНС, але питання початкової виставки в ньому теж не розглядаються. Перехід на самоорієнтування БІНС дає можливість виключити зі складу комплексу, до якого входить БІНС, систему прицілювання, а це спрощує й здешевлює його виробництво та створює умови для підвищення його потенційної точності, веде до скорочення часу його готовності, що є дуже важливим з огляду на тактичні вимоги до навігаційного комплексу. Завдяки цьому питання удосконалення методів самоорієнтування БІНС стає актуальним.

Мета статті

Провести аналіз і зробити оцінку похибки визначення азимута самоорієнтовною БІНС на ЛГ під дією на неї випадкової хитавиці.

Виклад основного матеріалу

Для визначення азимута за допомогою ЛГ скористаємося результатами роботи [5]. В цій роботі одержано математичний вираз для визначення азимута методом аналітичного гірокомпасування по сигналах ЛГ у вигляді частоти, яка пропорційна горизонтальній складовій кутової швидкості обертання Землі. Сукупність двох ЛГ створює ЧЕ лазерного гірокомпаса (ЛГК). Цей вираз має вигляд

$$\alpha = arctg\left(ctg\theta - \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{f_2}{f_1} \right) + \sigma , \qquad (1)$$

де α – азимут, що визначається; θ – кут між площинами резонаторів ЛГ, що утворюють ЧЕ ЛГК; f_1, f_2 – корисні сигнали (частоти) на виході відповідних ЛГ; σ – похибка горизонтування осей чутливості ЛГ, яка аналогічна кардановій похибці в класичній (механічній) гіроскопії. Оскільки вже було визначено, що тріади ЧЕ ортогональні, то $\theta = \frac{\pi}{2}$ і вираз (1) набуває вигляд

$$\alpha = -arctg\left(\frac{f_2}{f_1} \right) + \sigma . \qquad (2)$$

Знак мінус у виразі (2) показує, що у вибраній правій системі координат відлік азимута йде за годинниковою стрілкою згідно із визначенням поняття азимута.

Представимо σ у розгорнутому вигляді [5]

$$\sigma = arctg\frac{B}{A};$$
$$A = \cos\varphi\sin\gamma + \sin\varphi\cos\beta\sin\gamma;$$
$$B = \sin\varphi\sin\beta ,$$

де A і B – многочлени, які установлюють зв'язок системи координат ЧЕ ЛГК з географічною системою координат; φ-широта місця; β, γ – кути, що характеризують відхилення осей чутливості ЛГ від площини горизонту й вимірюються Акс з їх тріади.

Із співвідношення (1) випливає, що для реалізації ЧЕ ЛГК достатньо двох ЛГ, осі чутливості яких близькі або паралельні площині горизонту. При цьому кут γ характеризує відхилення осі чутливості ЛГ від площини горизонту, а кут β – поворот ЛГ навколо його осі чутливості. Ці два ЛГ виокремлюються з їх тріади й безпосередньо задіяні в процесі визначення азимута. Аналогічно із тріади Акс виділимо два акселерометри, вимірювальні осі яких паралельні осям чутливості ЛГ. Оскільки всі вимірювачі (ЛГ і Акс) зв'язані між собою жорстко, то згідно з вибраною орієнтацією їх осей чутливості випливає, що при повороті першого ЛГ на кут γ_1 викликає поворот осі другого ЛГ на кут β_2 і навпаки, тобто

$$\gamma_1 = \beta_2 ;\ \gamma_2 = \beta_1 . \qquad (3)$$

Вирази (3) свідчать, що обидва ЛГ коливаються синхронно й синфазно, де β, γ – амплітуди кутів відповідних коливань, які вимірюються Акс. Оскільки коливання по кутах β і γ по-різному впливають на похибку визначення азимута, то далі будемо окремо вести їх дослідження незважаючи на їх зв'язок (3). Для спрощення викладок покладемо

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta ;\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma .$$

Оцінимо величину похибки визначення азимута БІНС, що установлена на основі, яка випадково хитається в просторі. При цьому кожен ЛГ сприймає цю хитавицю у вигляді проекції на свою вісь чутливості. Припустимо, що система координат, яка зв'язана з ЛГ, має стійкі положення при $\beta=\beta_0$ і $\gamma=\gamma_0$, де β_0 і γ_0 випадкові сталі величини цих кутів. Ця система здійснює малі випадкові коливання відносно стійкого положення. У такому випадку можливо прийняти, що β і γ мають вигляд $\beta=\beta_0+\xi$; $\gamma=\gamma_0+\eta$, де ξ і η випадкові похибки поточних кутів, що породжуються випадковою хитавицею зі значеннями математичного очікування

$$E\xi=0\,;\ E\eta=0 \tag{4}$$

і з достатньо малими дисперсіями $D\xi$ і $D\eta$.

Так як σ складним чином залежить від випадкових величин β_0 і γ_0, то, задовільнившись від нелінійних залежностей, одержимо оцінку σ^* для σ, а, відповідно, і оцінку для α^*. За формулою Тейлора маємо

$$\begin{aligned}
\cos\beta&=\cos(\beta_0+\xi)=\cos\beta_0-\xi\sin\beta_0+\underline{0}(\xi^2);\\
\sin\beta&=\sin(\beta_0+\xi)=\sin\beta_0+\xi\cos\beta_0+\underline{0}(\xi^2);\\
\cos\gamma&=\cos(\gamma_0+\eta)=\cos\gamma_0-\eta\sin\gamma_0+\underline{0}(\eta^2);\\
\sin\gamma&=\sin(\gamma_0+\eta)=\sin\gamma_0+\eta\cos\gamma_0+\underline{0}(\eta^2),
\end{aligned}$$

де $\underline{0}(x^2)$ – величини порядку x^2 при $x\to 0$. Тоді

$$\begin{aligned}
A&=\cos\varphi\cos\gamma_0+\sin\varphi\cos\beta_0\sin\gamma_0-\eta\cos\varphi\sin\gamma_0+\\
&+\sin\varphi(\eta\cos\beta_0\cos\gamma_0-\xi\sin\beta_0\sin\gamma_0)+\\
&+\underline{0}(\xi^2+\eta^2)=A^*+\zeta_1,
\end{aligned} \tag{5}$$

де

$$A^*=\cos\varphi\cos\gamma_0+\sin\varphi\cos\beta_0\sin\gamma_0\,, \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned}
\zeta_1&=\eta(\sin\varphi\cos\beta_0\cos\gamma_0-\cos\varphi\sin\gamma_0)-\\
&-\xi\sin\varphi\cos\beta_0\sin\gamma_0+\underline{0}(\xi^2+\eta^2)
\end{aligned}\ . \tag{7}$$

$$B=\sin\varphi\sin\beta_0+\xi\sin\varphi\cos\beta_0+\underline{0}(\xi^2)=B^*+\zeta_2, \tag{8}$$

де

$$B^*=\sin\varphi\sin\beta_0\,, \tag{9}$$

а

$$\zeta_2=\xi\sin\varphi\cos\beta_0+\underline{0}(\xi^2). \tag{10}$$

У формулах (6) та (9) A^* і B^* описують члени, які не залежать від дії хитавиці; ζ_1 і ζ_2 у формулах (7) і (10) представляють складові, що характеризують параметри випадкової хитавиці.

Побудуємо оцінку α^* у першому наближенні, тобто розглянемо оцінку вигляду

$$\alpha^*=-arctg\left(\frac{f_2}{f_1}\right)+\sigma^*, \tag{11}$$

де

$$\sigma^*=arctg\frac{B^*}{A^*}$$

та оцінимо середньоквадратичну похибку

$$\delta^2=E\left|\alpha-\alpha^*\right|^2. \tag{12}$$

Так як прийнято, що $D\xi$ і $D\eta$, достатньо малій $E\xi=0$, $E\eta=0$, то основна похибка буде знаходиться в області $|\xi|\le\varepsilon$, $|\eta|\le\varepsilon$ для деякого $\varepsilon>0$.

Для довільних дійсних чисел справедлива нерівність

$$|arctgx-arctgy|\le|x-y|.$$

Тому

$$\delta^2=E(\sigma-\sigma^*)^2=$$

$$=E\left(arctg\frac{B}{A}-arctg\frac{B^*}{A^*}\right)^2\le E\left(\frac{B}{A}-\frac{B^*}{A^*}\right)^2,$$

тобто

$$\delta^2\le E\left(\frac{B}{A}-\frac{B^*}{A^*}\right)^2. \tag{13}$$

За формулою Тейлора для функції $f(x,y)=\frac{x}{y}$ в околі точки (B^*,A^*) маємо

$$\frac{B}{A}-\frac{B^*}{A^*}=-\frac{B^*}{(A^*)^2}\zeta_1+\frac{1}{A^*}\zeta_2+\underline{0}(\zeta_1^2+\zeta_2^2).$$

Підставивши цей вираз у праву частину нерівності (13) та відкинувши члени другого порядку малості, отримаємо

$$\delta^2\le E\left(-\frac{B^*}{(A^*)^2}\zeta_1+\frac{1}{A^*}\zeta_2\right)^2=$$

$$=\left(\frac{B^*}{(A^*)^2}\right)^2E\zeta_1^2-\frac{2B^*}{(A^*)^3}E(\zeta_1\zeta_2)+\frac{1}{(A^*)^2}E\zeta_2^2\le$$

$$\le\left(\frac{B^*}{(A^*)^2}\right)^2E\zeta_1^2+2\left|\frac{B^*}{(A^*)^3}E(\zeta_1\zeta_2)\right|+\frac{1}{(A^*)^2}E\zeta_2^2.$$

Внаслідок нерівності Коші-Буняковського $\left|E(\zeta_1\zeta_2)\right| \le \sqrt{E\zeta_1^2 E\zeta_2^2}$.

Врахуємо також, що $E\zeta_1^2 = D\zeta_1$ оскільки $E\zeta_i = 0$, $i = 1{,}2$. Таким чином,

$$\delta^2 \le \left(\frac{B^*}{\left(A^*\right)^2}\right)^2 D\zeta_1 + 2\left|\frac{B^*}{\left(A^*\right)^3}\right|\sqrt{D\zeta_1 D\zeta_2} + \frac{1}{\left(A^*\right)^2}D\zeta_2 . \quad (14)$$

Нерівність (14) дає загальну оцінку похибки визначення азимута самоорієнтовною БІНС при дії на неї випадкової хитавиці.

На практиці значення кутів β_0 і γ_0 можуть досягати одиниць кутових градусів. Тому в формулах (6), (7), (9) і (10) відкинемо члени першого порядку малості, маємо:

$$A^* = \cos\varphi ;\ \zeta_1 = \eta\sin\varphi ;$$
$$B^* = 0 ;\ \zeta_2 = \xi\sin\varphi .$$

Підставивши ці значення в праву частину нерівності (14), отримаємо

$$\delta^2 \le \left(tg^2\varphi\right)D\xi ,$$

звідки

$$\delta \le tg\varphi\sqrt{D\xi} . \quad (15)$$

Але для побудові оцінки α^* необхідно знати значення кутів β_0 і γ_0, для наближеного обчислення яких необхідно мати виборки кутів β і γ.

Нехай $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – значення виборок кутів β , а $(y_1, y_2, ..., y_n)$– значення виборок кутів γ при n спостереженнях. Тоді по відомих формулах знаходження оцінок середньої випадкової величини [6] знаходимо

$$\beta_{0,n}^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \ ;\ \gamma_{0,n}^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k \ ,$$

де $\beta_{0,n}^*$ - оцінка β_0; $\gamma_{0,n}^*$ - оцінка γ_0($\beta_{0,n}^* \to \beta_0$; $\gamma_{0,n}^* \to \gamma_0$ при $n \to \infty$).

Тепер розглянемо $B^* = \sin\varphi\sin\beta_{0,n}^*$; $A^* = \cos\varphi\cos\gamma_{0,n}^* + \sin\varphi\cos\beta_{0,n}^*\sin\gamma_{0,n}^*$ і обчислимо

$$\hat{\sigma}_n^* = arctg\frac{\sin\varphi\sin\beta_{0,n}^*}{\cos\varphi\cos\gamma_{0,n}^* + \sin\varphi\cos\beta_{0,n}^*\sin\gamma_{0,n}^*} ,$$

а для оцінки α візьмемо вираз

$$\hat{\alpha}^* = -arctg\left(\frac{f_2}{f_1}\right) + \hat{\sigma}_n^* . \quad (16)$$

Тут $\hat{A}^*$, $\hat{B}^*$, $\hat{\alpha}^*$ і $\hat{\sigma}^*$ - оцінки відповідних параметрів, отриманих у процесі експериментальних досліджень виборок значень кутів β і γ .

При оцінці середньоквадратичної похибки необхідно знати дисперсії $D\xi$ і $D\eta$.

Маючи виборки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $(y_1, y_2, ..., y_n)$, по відомих формулах наближено обчислимо дисперсії [6]:

$$\hat{\sigma}_{1,n}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \beta_{0,n}^*\right)^2 ;$$
$$\hat{\sigma}_{2,n}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k - \gamma_{0,n}^*\right)^2 ,$$

де $\hat{\sigma}_{1,n}^2$ дає наближення дисперсії $D\xi$, а $\hat{\sigma}_{2,n}^2$ - наближення дисперсії $D\eta$.

По формулах (14) або (13), де покладемо $\beta_0 = \beta_{0,n}^*$ і $\gamma_0 = \gamma_{0,n}^*$, $D\xi = \hat{\sigma}_{1,n}^2$, $D\eta = \hat{\sigma}_{2,n}^2$ обчислимо середньоквадратичну похибку, яка дає критерій можливого прийняття замість істинного кута α його наближене значення $\hat{\alpha}^*$, обчисленого по (16).

В тому випадку, коли в явному вигляді відомий розподіл випадкових величин ξ і η , тоді можливі такі ж значення в явному вигляді і для β_0 , γ_0 , $D\xi$ і $D\eta$. Знаючи β_0 і γ_0 по формулі (11) обчислимо α^* і будемо це значення брати далі замість істинного кута α .

Нехай (,…,

Висновки

1. Одержана в цій роботі оцінка похибки визначення азимута α внаслідок дії на БІНС випадкових коливань (15) повністю відповідає фізиці явищ, які супроводжують процес гірокомпасування, дозволяє розробникам цих систем цілеспрямовано вести їх удосконалення.

2. Із одержаної оцінки витікає, що середньоквадратична похибка визначення азимута α на випадково збуреній кутовими коливаннями основі БІНС пропорціональна тангенсу широті місця й корню квадратному із дисперсії випадкових збурень, що лежать в площині резонатора лазерного гіроскопа, тобто коливань навколо осі, що збігається з його віссю чутливості й практично не залежить від коливань у інших площинах.

3. Оскільки при одержанні оцінки похибки визначення азимута не накладається ніяких обмежень

на закони коливань та форму вихідних сигналів, то одержаний результат має узагальнений характер і може бути поширений на застосування в БІНС гіроскопів, побудованих на інших фізичних принципах, наприклад, оптичні, волоконно-оптичні, динамічно-настроювані, мікромеханічні та інші.

4. Характерною особливістю одержаного результату оцінки похибки є те, що коливання навколо осі чутливості ЛГ викликає ефект «вібраційної підставки», що веде до суттєвого збільшення похибки вимірювання азимута. Оцінка допустимих параметрів хитавиці (амплітуди й частоти) при заданому значенні похибки визначення азимута має бути метою подальших досліджень цієї теми.

Список літератури

1. *Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В.В. Матвеев, В.Я. Распопов / Под общ. ред. д.т.н. В.Я. Распопова. – СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2009.-280 с.*
2. *Самоориентирующиеся гиростабилизаторы (Обзор). – Вопросы ракетной техники, 1973, №1. – С.78-87.*
3. *Черняк М.Г. Застосування мікромеханічного акселерометра для вимірювання кутів нахилу об'єкта / М.Г. Черняк. – Сенсорна електроніка і мікросистемні технології, 2010, Т.1(7).- №4. – С.9-16.*
4. *Лазарєв Ю.Ф., Бобровицька Я.Г. Розроблення і моделювання алгоритмів безплатформової системи орієнтації, Електронний навчальний посібник / Ю.Ф. Лазарєв, Я.Г. Бобровицька. – Київ: НТУУ «КПІ», 2011. – 135 с.*
5. *Гречка Г.П., Лукьянов Д.П., Мочалов А.В. Лазерное гирокомпасирование. В кн. Лазерные измерительные системы / А.С. Батраков, М.М. Бутусов, Г.П. Гречка и др.; Под ред. Д.П. Лукьянова. – М.: Радио и связь, 1981. – С. 254 – 292.*
6. *Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с.*

Рецензент: д.т.н., проф. Ю.В. Шабатура, Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів.

Оценка погрешности определения азимута самоориентированной БИНС при действии на неё случайной качки

Г.П. Гречка, В.Н. Королев

Выполнена оценка погрешности определения азимута самоориентирующейся бесплатформенной инерциальной навигационной системой (БИНС) на лазерных гироскопах при действии на неё случайной качки. Результаты получены без наложения каких-либо ограничений на сигналы лазерных гироскопов, носят общий характер и могут быть распространены на БИНС, построенных на других типах гироскопов: оптических, волоконно-оптических, динамически-настраиваемых, микромеханических и т.п.

Ключевые слова: *самоориетирующаяся бесплатформенная инерциальная навигационная система, аналитическое гирокомпасирование, случайная качка, лазерный гироскоп, линейный акселерометр, среднеквадратическая погрешность.*

The estimation error of azimuth of self-orientation SINS in action by the random pitching

G. Hrechka, V. Koroliov

The estimation of self-orienting strapdown navigation system (SINS) azimuth error of laser gyro influenced by random pitching has been done. Results are obtained without imposing any limitations on the signals of laser gyros, are generic and can be extended to SINS built on other types of gyroscopes: optical, fiber optic, dynamically configurable, micromechanical etc.

Key words: *self-orienting strapdown inertial navigation system analytical gyrocompassing, random pitching, lazer gyroscope, linear accelerometer, least square error.*