

УДК 519.876.5

В.І. Грабчак¹, В.М. Супрун², А.М. Заскока², Б.І. Сокіл¹¹Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів²Сумський державний університет, м. Суми

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ УРАЖЕННЯ АРТИЛЕРІЙСЬКОЇ БАТАРЕЇ ПРОТИВНИКА З УРАХУВАННЯМ СВОЄЧАСНОСТІ ЇЇ ВИЯВЛЕННЯ

В статті наведена математична модель бойового функціонування самохідної артилерійської батареї на вогневій позиції з урахуванням своєчасності її виявлення, опис функціонування якої, заданий напівмарківським процесом і системою лінійних інтегральних рівнянь. Отримана загальна формула для визначення своєчасності відкриття вогню по цілі, знайдено розрахункові співвідношення за умови, що час перебування цілі на вогневій позиції розподілений за нормальним законом, а час підготовки до ураження – за показниковим. Проведений розрахунок показника ефективності ступеня ураження самохідної артилерійської батареї.

Ключові слова: напівмарківський процес, самохідна артилерійська батарея, математична модель, показник ефективності артилерійського вогню, функції розподілу, своєчасність відкриття вогню.

Вступ

Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури. Одним із головних завдань, які розв'язуються в ході вогневого ураження противника є боротьба з його артилерією. Відомо, що більша частина сучасних артилерійських комплексів, що підлягають ураженню, є високоманевровими і здатними в короткі проміжки часу залишити вогневу позицію (ВП) [1]. В той же час перебування високоманеврових цілей на ВП визначається багатьма факторами, наприклад, видом об'єкту, характером завдання, яке виконується і т. і. Для таких умов величина втрат при нанесенні вогневого удару по високоманевровій цілі противника залежить від цілого ряду випадкових величин. Такими, наприклад, є час зайняття і час перебування цілі на ВП, час виявлення об'єкту і виконання ним вогневого завдання, час залишення ВП і т. і. Тому, визначаючи показники ефективності та ступінь ураження високоманеврової цілі, необхідно враховувати ймовірність того, що вогневий наліт по цілі здійснено до того моменту часу, поки вона не залишила ВП.

Досить часто вирішення цих питань базується на побудові аналітичних математичних моделей, які описуються марківськими випадковими процесами з дискретною множиною станів і неперервним часом [2-4]. При побудові марківської моделі реальної системи, у якості вихідних даних необхідно мати досить повний опис її функціонування з урахуванням усіх випадкових факторів, що впливають на зміну її фізичних станів.

Метою статті є розробка аналітичної моделі ураження артилерійської батареї противника з урахуванням своєчасності її виявлення, яка дозволяє

© В.І. Грабчак, В.М. Супрун, А.М. Заскока, Б.І. Сокіл

описати процес функціонування самохідної артилерійської батареї (*сабатр*) противника за допомогою напівмарківського процесу, який на відміну від марківських моделей систем задає час перебування системи у відповідних станах випадковими величинами з довільними функціями розподілу, які залежать тільки від поточного стану системи, а також визначити ступінь ефективності ураження артилерійської батареї противника.

Основна частина

1. Постановка задачі. За даними повітряної розвідки виявлено *сабатр* противника на ВП. Бойовий порядок батареї противника – уступом назад. Координати цілі визначені на початок розгортання батареї противника на ВП. До ураження батареї противника залучається самохідний артилерійський дивізіон 152-мм СГ 2С3. Визначення установок для стрільби на ураження здійснюється на основі повної підготовки.

1.1. Формалізація задачі. З постановки задачі випливає, що в бойових діях беруть участь два однорідних протидіючих угруповання: з одного боку – артилерійська батарея противника (сторона А), з іншого – артилерійський дивізіон 152-мм СГ 2С3 (сторона В). Очевидно, що динаміка процесу бою між протидіючими угрупованнями є складною фізичною системою $S = S(S_1^*, S_2^*)$, елементами якої у свою чергу є, відповідно, сторони А і В, між якими встановлені зв'язки і операції.

Ефективність функціонування підсистеми S_1^* і S_2^* визначається відповідними параметрами, між якими існує функціональна залежність. Враховуючи, що при веденні бойових дій важливу

роль відіграє фактор випадковості, будемо вважати, що система $S = S(S_1^*, S_2^*)$ описується випадковим процесом $X = X(t)$, $t \geq 0$. У зв'язку з цим при побудові математичної моделі бойового функціонування *сабатр* противника необхідно врахувати фактор випадковості. Виходячи з ймовірнісних характеристик системи в якості головного показника ефективності прийнята ступінь ураження *сабатр* з урахуванням часу перебування на ВП, часу підготовки і тривалості вогневого нальоту.

2. Математична модель бойового функціонування сабатр

2.1. Побудова ймовірнісної математичної моделі функціонування сабатр

Нехай процес бойового функціонування *сабатр* описується деякою фізичною підсистемою S_1^* системи $S = S(S_1^*, S_2^*)$, яка може перебувати в одному з наступних станів:

S_1 – батарея зайняла ВП і розгорнулася в бойовий порядок;

S_2 – батарея виконала вогневе завдання;

S_3 – батарея залишила ВП;

S_4 – батарея знаходиться під вогневим впливом.

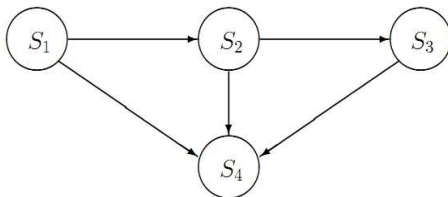


Рис. 1. Орієнтований граф станів

Орієнтований граф переходів системи $S_1^* = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ зі стану в стан надано на рис. 1.

Будемо вважати, що перехід підсистеми S_1^* із одного стану в інший (функціонування *сабатр* на ВП) відбувається наступним чином:

1) в початковий момент часу $t = 0$ (відлік часу починаємо з моменту зайняття *сабатр* ВП і розгортання в бойовий порядок) система знаходиться в стані S_1 протягом деякого випадкового часу θ_1 , тобто це час, який підсистема S_1^* перебуває в стані S_1 до переходу в S_2 або S_4 , з довільною функцією розподілу $F_{12}(t)$ або $F_{14}(t)$;

2) перехід підсистеми S_1^* зі стану S_i в стан S_j відбувається з ймовірністю $p_{ij} \geq 0$, $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ для $j \in S$ ($i, j = 1, \dots, 4$);

3) якщо зі стану S_i відбувається перехід в стан S_j , то в цьому стані підсистема знаходиться випадковий час θ_j з довільною функцією розподілу $F_{ij}(t)$ і т.д.

Виходячи з [3, 5] процес бойового функціонування *сабатр* представимо за допомогою початкового розподілу

$$p = p_i, i \in S_1^*, (i = 1, \dots, 4) \quad (1)$$

і напівмарківської матриці

$$Q_{ij}(t) = p_{ij} F_{ij}(t). \quad (2)$$

Таким чином, розв'язок задачі зводиться до визначення перехідних ймовірностей

$$P_{ij} = P\{X(t) = S_j / X(0) = S_i\}, (i, j = 1, \dots, 4) \quad (3)$$

які задовольняють наступній системі лінійних інтегральних рівнянь [3]:

$$P_{ij} = \delta_{ij} [1 - F_i(t)] + \sum_{k \in S_0} \int_0^t Q_{ik}(du) P_{ik}(t-u); \quad (4)$$

$$F_i(t) = \sum_{j \in S} Q_{ij}(t) = \sum_j p_{ij} F_{ij}(t) = P_i(\theta_i < t), \quad (5)$$

де $Q_{ik}(du) = dQ_{ik}(u)$; θ_i – час перебування підсистеми S_1^* в стані S_i незалежно від переходу в наступний стан; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Приймаючи до уваги орієнтований граф станів підсистеми S_1^* (рис. 1) і співвідношення (4), запишемо перехідні ймовірності $P_{ij}(t)$ ($i, j = 1, \dots, 4$), які визначають процес функціонування *сабатр* на ВП:

$$P_{12}(t) = \int_0^t Q_{12}(du) P_{22}(t-u) = \int_0^t Q_{12}(du) [1 - F_2(t-u)]; \quad (6)$$

$$P_{13}(t) = \int_0^t Q_{12}(du) \int_0^{t-u} Q_{23}(dv) [1 - F_3(t-u-v)]; \quad (7)$$

$$P_{23}(t) = \int_0^t Q_{23}(du) P_{33}(t-u) = \int_0^t Q_{23}(du) [1 - F_3(t-u)]. \quad (8)$$

Відмітимо, що у відповідності з фізичним змістом задачі стан S_4 інтерпретується як втрата боєздатності *сабатр* (за класифікацією станів [2, 3] випадкового процесу він є поглинаючим), так як перехід в нього підсистеми S_1^* на різних етапах свого функціонування призводить до невиконання поставленого завдання.

Позначимо момент першого переходу підсистеми S_1^* в стан S_4 через η , тоді

$$P_{i4} = P_{i4}\{\eta < t\}, (i = 1, 2, 3), \quad (9)$$

це ймовірність того, що *сабатр* втратила боєздатність, а η – час, необхідний для виявлення і завдання вогневого удару по *сабатр*.

Шукані ймовірності визначимо з (4) (рис. 1):

$$P_{14}(t) = Q_{14}(t) \int_0^t Q_{12}(du) Q_{24}(t-u) + \int_0^t Q_{12}(du) \int_0^{t-u} Q_{23}(dv) Q_{34}(t-u-v); \quad (10)$$

$$P_{24}(t) = Q_{24}(t) + \int_0^t Q_{23}(du) Q_{34}(t-u); \quad (11)$$

$$P_{34}(t) = Q_{34}(t). \quad (12)$$

Отримані загальні співвідношення (10-12) і напівмарківська матриця (2) дають можливість підрахувати ймовірність втрати боєздатності (переходу в стан S_4 зі станів S_1 , S_2 або S_3) *сабатр* при заданні вогневого удару артилерійським дивізіоном 152-мм СГ 2С3.

2.2. Розрахункові формули для визначення втрати боєздатності *сабатр*

Оскільки функціонування *сабатр* на ВП описується напівмарківським процесом, то задамо його вектором $P = \{p_i \in S\} = \{1, 0, 0, 0\}$ і напівмарківською матрицею

$$Q(t) = \{Q_{ij}(t), i, j \in S\} = \{p_{ij}(1 - e^{-\lambda_i t}), t \geq 0, \sum p_{ij} = 1, \lambda_i > 0\}, \quad (13)$$

де $\{p_{ij}, i, j \in S\} = P$ – матриця ймовірностей переходу ланцюга Маркова; λ_i – інтенсивність переходу підсистеми S_1^* із одного стану в інший.

За даними [1, 6, 7], час t перебування високоманевреної цілі на ВП включає в себе час зайняття ВП і розгортання в бойовий порядок – від 4 до 5 хв, час підготовки і виконання вогневого завдання – від 5 до 6 хв, час залишення ВП – від 2 до 3 хв. Отже, час перебування *сабатр* на ВП розглядається як випадкова величина, яка може приймати значення в інтервалі від $t_{\min} = 11$ хв до $t_{\max} = 14$ хв. Оскільки t є випадковою величиною, очікуване значення часу перебування батареї противника у відповідних станах на ВП будемо оцінювати за формулою

$$\bar{t}_i = \frac{t_{\min} + t_{\max}}{2}, \quad (i = 1, \dots, 4). \quad (14)$$

Дані розрахунків за (14) наведені у табл. 1.

Елементи матриці P [5, 8] визначимо з умови, що

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{j \in S} a_{ij}} = \frac{\bar{t}_i}{\sum_{i \in S} \bar{t}_i}, \quad (15)$$

де a_{ij} – середній час перебування підсистеми S_1^* в стані S_i до переходу в S_j .

Таблиця 1

Числові значення складових часу функціонування *сабатр* у відповідних станах

№ з/п	Стани функціонування <i>сабатр</i>	Оцінка перебування у станах, хв.		
		t_{\min}	t_{\max}	$\bar{t}_i (i = 1, \dots, 4)$
1	Зайняття ВП	4	5	$\bar{t}_i = 4.5$
2	Виконання вогневого завдання	5	6	$\bar{t}_i = 5.5$
3	Залишення вогневої позиції	2	3	$\bar{t}_i = 2.5$
4	Тривалість вогневого нальоту			$\bar{t}_i = 10$

Маємо, з урахуванням даних табл. 1

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.24 & 0.11 & 0.45 \\ 0 & 0.3 & 0.14 & 0.56 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Далі, враховуючи, що $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ – функція розподілу часу θ_i перебування підсистеми S_1^* в стані S_i , $i \in S_1^*$, знайдемо математичне сподівання часу її перебування у відповідних станах

$$E(\theta_i) = \int_0^{\infty} t dF_i(t) = \lambda_i \int_0^{\infty} t e^{-\lambda_i t} dt = \frac{1}{\lambda_i}. \quad (17)$$

Якщо прийняти $E(\theta_i) = \bar{t}_i$, отримуємо $\lambda_i = \frac{1}{\bar{t}_i}$ – величину, обернену до середнього часу перебування підсистеми S_1^* в стані S_i . Враховуючи дані табл. 1, маємо

$$\lambda_1 = 0.22, \lambda_2 = 0.18, \lambda_3 = 0.4. \quad (18)$$

Після підстановки (13) до (10-12), знаходимо ймовірності переходу *сабатр* під вогневий вплив:

$$P_{34}(t) = Q_{34}(t) = p_{34}(1 - e^{-\lambda_3 t}); \quad (19)$$

$$P_{24}(t) = Q_{24}(t) + \int_0^{\infty} Q_{23}(du) Q_{34}(t-u) = p_{24}(1 - e^{-\lambda_2 t}) + \lambda_2 p_{23} p_{34} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 u} (1 - e^{-\lambda_3(t-u)}) du = p_{24}(1 - e^{-\lambda_2 t}) + p_{23} p_{34} (1 - e^{-\lambda_2 t}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} p_{23} p_{34} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_3 t}), \quad (20)$$

або

$$P_{24}(t) = s + m e^{-\lambda_2 t} - \kappa e^{-\lambda_3 t}, \quad (21)$$

де $s = p_{24} + p_{23} p_{34}$; $m = \frac{\lambda_2 p_{23} p_{34}}{\lambda_2 - \lambda_3} - p_{24}$; $\kappa = \frac{\lambda_2 p_{23} p_{34}}{\lambda_2 - \lambda_3}$.

Аналогічно попередньому

$$P_{14}(t) = s_1 - m_1 e^{-\lambda_1 t} + \kappa_1 e^{-\lambda_2 t} - p_1 e^{-\lambda_3 t}, \quad (22)$$

де $s_1 = p_{14} + p_{12}p_{24} + p_{12}p_{23}p_{34}$;

$$m_1 = p_{14} - p_{12}p_{24} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + p_{12}p_{23}p_{34} \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)};$$

$$\kappa_1 = p_{12}p_{23}p_{34} \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} - p_{12}p_{24} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2};$$

$$p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 p_{12} p_{23} p_{34}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)}.$$

Підставимо в (19), (20), (22) значення p_{ij} з (17) і λ_i з (18), в результаті отримаємо розрахункові

формули для визначення шуканих ймовірностей:

$$P_{14}(t) = 0.611 + 0.424e^{-0.22t} - 1.008e^{-0.18t} - 0.027e^{-0.42t}; \quad (23)$$

$$P_{24}(t) = 0.672 - 0.764e^{-0.18t} + 0.092e^{-0.4t}; \quad (24)$$

$$P_{34}(t) = 0.8 - 0.8e^{-0.4t}. \quad (25)$$

Припустимо, що вогневий наліт по *сабатр* противника триває 10 хв, розрахуємо ймовірності переходу підсистеми S_1^* зі станів S_1 , S_2 і S_3 в стан S_4 . Тобто для ситуації, коли *сабатр* займає ВП, виконує вогневе завдання і залишає ВП. Дані розрахунків наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Ймовірності переходу підсистеми S_1^* в стан S_4 зі станів S_1 , S_2 і S_3

№ з/п	Ймовірності переходів	Тривалість вогневого нальоту t , хв.									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$P_{14}(t)$	0.091	0.169	0.235	0.291	0.339	0.38	0.414	0.444	0.469	0.491
2	$P_{24}(t)$	0.096	0.18	0.255	0.319	0.374	0.421	0.461	0.495	0.523	0.547
3	$P_{34}(t)$	0.264	0.441	0.559	0.639	0.692	0.727	0.751	0.767	0.778	0.785

2.3. Розрахункові формули для визначення ймовірності своєчасності вогню по *сабатр*

Сучасні реальні об'єкти, які підлягають ураженню є високоманевреними і здатні в короткі проміжки часу виконати вогневе завдання і залишити ВП. Для визначення ступеня ураження високоманеврених цілей використаємо формулу [1, 9]

$$M^* = M \cdot P_c, \quad (26)$$

де M – математичне сподівання відносного числа ураження окремих цілей зі складу групової; P_c – ймовірність своєчасності вогню по цілі.

З ймовірнісної точки зору [10-12] величини M і P_c , що входять до (26), є характеристиками випадкових величин. Це, наприклад, момент зайняття ВП, виконання бойового завдання, час, необхідний для визначення координат цілі, підготовка даних і завдання вогневого удару.

Ці величини в свою чергу залежать [1, 9] від багатьох факторів, таких як рівень підготовки особового складу, часу функціонування комплексу, швидкодії автоматизованої системи управління артилерійської системи, ефективності засобів розвідки і т.д. Виходячи з вищесказаного (26) бачимо, що ступінь ураження високоманевреної цілі значною мірою залежить від P_c – ймовірності своєчасності вогню. Позначимо через t_{Π} випадкову величину – час перебування високоманевреної цілі на ВП, і $\varphi(t_{\Pi})$ – щільність розподілу часу t_{Π} . Через $t_{\Pi ДГ}$ випадкову величину – час, необхідний на підготовку і завдання вогневого удару та $f(t_{\Pi ДГ})$ – щільність розподілу часу $t_{\Pi ДГ}$. З фізичної точки

зору зрозуміло, що завдання вогневого удару по цілі буде своєчасним лише за умови, якщо $t_{\Pi ДГ} < t_{\Pi}$; якщо ж $t_{\Pi ДГ} \geq t_{\Pi}$, завдання вогневого удару по цілі не буде своєчасним і вона залишиться неураженою. Позначимо через ν відношення $\frac{t_{\Pi ДГ}}{t_{\Pi}}$. Параметр ν як відношення двох випадкових

величин є випадковою величиною і при значеннях $\nu < 1$ ($\nu \geq 1$) виступає в ролі ймовірнісної характеристики своєчасності вогню по цілі. Тоді для визначення P_c необхідно знайти закон розподілу параметра ν , маємо

$$P_c \left\{ \frac{t_{\Pi ДГ}}{t_{\Pi}} \leq \nu \right\} = P_c \{ t_{\Pi ДГ} \leq \nu t_{\Pi} \} = \int_0^{\infty} F(\nu t_{\Pi}) \varphi(t_{\Pi}) dt_{\Pi}, \quad (27)$$

де $F(\nu t_{\Pi})$ – функція розподілу випадкової величини $t_{\Pi ДГ}$, за умови, що $t_{\Pi ДГ} = \nu t_{\Pi}$.

Знайдемо щільність розподілу параметра ν , для цього продиференціюємо (27) за ν , тобто

$$\frac{dP_c \{ t_{\Pi ДГ} \leq \nu t_{\Pi} \}}{d\nu} = \psi(\nu) = \int_0^{\infty} F(\nu t_{\Pi}) t_{\Pi} \varphi(t_{\Pi}) dt_{\Pi}, \quad (28)$$

звідки отримуємо співвідношення для знаходження ймовірності своєчасності вогню по цілі

$$P_c = \int_0^1 \int_0^{\infty} f(\nu t_{\Pi}) t_{\Pi} \varphi(t_{\Pi}) dt_{\Pi} d\nu. \quad (29)$$

Нехай за результатами статистичного моделювання не виявлено протиріччя гіпотезі про належність показниковому розподілу часу $t_{ПДГ}$ до вогневого удару, а час $t_{П}$ – перебування батареї противника на ВП підпорядковується нормальному закону, тоді

$$f(t_{ПДГ}) = e^{-\lambda t_{ПДГ}}, \quad (30)$$

де λ – невідомий параметр розподілу випадкової величини $t_{ПДГ}$, а

$$\varphi(t_{П}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} e^{-\frac{(t_{П}-m_{t_{П}})^2}{2\sigma_t^2}}, \quad (31)$$

де $m_{t_{П}}$ і $\sigma_{t_{П}}$ – невідомі параметри розподілу випадкової величини $t_{П}$.

Підставимо (31) і (32) до (30) та отримуємо

$$P_c = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t e^{-\lambda vt} e^{-\frac{(t-m_{t_{П}})^2}{2\sigma_t^2}} dt. \quad (32)$$

Для зручності викладок покладемо $t_{П} = t$ і після нескладних перетворень представимо (33) у вигляді

$$P_c = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} e^{-\frac{m_{t_{П}}^2}{2\sigma_t^2}} \int_0^1 e^{-\frac{(m_{t_{П}}-\sigma_t^2\lambda v)^2}{2\sigma_t^2}} \times \\ \times \int_0^{\infty} [(m_{t_{П}}-\sigma_t^2\lambda v) + \sigma_t u] e^{-\frac{u^2}{2}} du dv = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_{t_{П}}^2}{2\sigma_t^2}} \times \\ \times \int_0^1 e^{-\frac{(m_{t_{П}}-\sigma_t^2\lambda v)^2}{2\sigma_t^2}} \left\{ m_{t_{П}} - \sigma_t^2\lambda v \right\} \int_{\frac{\sigma_t^2\lambda v - m_{t_{П}}}{\sigma_t}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \sigma_t \times \\ \times \int_{\frac{\sigma_t^2\lambda v - m_{t_{П}}}{\sigma_t}}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du \} dv. \quad (33)$$

Скористаємось тим [10, 12], що $\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$ – функція Лапласа. Після

деяких спрощень і інтегрування отримуємо наступне співвідношення для шуканої ймовірності

$$P_c = \left(1 - e^{-\frac{m_{t_{П}}^2 + \sigma_t^2 \lambda^2}{2}} \right) \left[0.5 + \Phi\left(\frac{m_{t_{П}} - \sigma_t^2 \lambda}{\sigma_t}\right) \right] + \\ + \left[\Phi\left(\frac{m_{t_{П}}}{\sigma_t}\right) - \Phi\left(\frac{m_{t_{П}} - \sigma_t^2 \lambda}{\sigma_t}\right) \right]. \quad (34)$$

Методом максимальної правдоподібності можна показати, що точковими оцінками невідомих параметрів m_t і σ_t нормального розподілу є \bar{x}_B і σ_B , тобто $\bar{x}_B \approx m_t$, $\sigma_B \approx \sigma_t$, а точковою оцінкою параметра λ є величина, обернена до $\bar{x}_B = M(t_{ПДГ})$.

З [1, 6, 7] слідує, що середній час підготовки дивізіону до виконання вогневого завдання складає 2.5-3 хв, тоді $\lambda = 0.36$, а середній час перебування батареї на ВП складає 11-14 хв, тому $m_t = 12.5$, а $\sigma_t = 1.5$. Підставляємо ці дані в (34) і скористаємось таблицею для значень функції $\Phi(x)$ [11], остаточно отримуємо $P_c = 0.98$.

3. Розв'язок задачі.

3.1. Визначення показника ефективності вогню по сабатр

Величина математичного сподівання M з (26) за умов, що розсіювання снарядів розподілене за рівномірним законом і ціль накрита областю розривів, визначається за формулою [10, 14]

$$M = P_{\theta} \cdot \left(1 - e^{-\frac{NS_3}{\Gamma_{ЗРР}\Phi_{ЗРР}}} \right), \quad (35)$$

де P_{θ} – ймовірність накриття цілі областю розривів (влучення в прямокутник зі сторонами $\Gamma_{ЗРР}$ і $\Phi_{ЗРР}$); N – загальна витрата снарядів; S_3 – зведена зона ураження; $\Gamma_{ЗРР}(\Phi_{ЗРР})$ – глибина (фронт) зони рівномірного розподілення снарядів.

3.2. Ймовірність накриття цілі

З урахуванням штучного та технічного розсіювання снарядів, а також наявності помилок підготовки установок для ведення вогню ймовірність накриття цілі областю розривів P_{θ} залежить від багатьох параметрів і в загальному випадку може бути задана у вигляді функціональної залежності [14]

$$P_{\theta} = f(E'_{\Delta 3}, E'_{n3}, B_{\Delta 3}^2, B_{\Phi 3}^2, n_{\Gamma}, n_{\Phi}, h_x, h_z, \Gamma_{ЗРР}, \Phi_{ЗРР}), \quad (36)$$

де $E'_{\Delta 3}(E'_{n3})$ – зведені серединні помилки підготовки за дальністю (напрямок); $B_{\Delta 3}^2(B_{\Phi 3}^2)$ – зведені серединні помилки розсіювання за дальністю (напрямок); $n_{\Gamma}(n_{\Phi})$ – число установок прицілу (кутоміра); $h_x(h_z)$ – відстань між точками прицілювання за дальністю (напрямок).

Згідно з [1] ймовірність накрыття цілі зоною рівномірного розсіювання може бути визначена за допомогою зведеної функції Лапласа [1, 13]

$$P_{\theta} = \mathfrak{F}\left(\frac{\Gamma_{3PP}}{2E'_{\partial 3}}\right) \cdot \mathfrak{F}\left(\frac{\Phi_{3PP}}{2E'_{H3}}\right), \quad (37)$$

де $\mathfrak{F}(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\rho^2 t^2} dt$ – зведена функція Лапласа

(табульована [1]); $\rho = 0.4769$;

$$\begin{aligned} E'_{\partial 3} &= \sqrt{E_{\partial 3}^2 + 0.038\Gamma_Y^{*2}}, \\ E'_{H3} &= \sqrt{E_{H3}^2 + 0.038\Phi_Y^{*2}} - \end{aligned} \quad (38)$$

зведені серединні помилки підготовки під час стрільби по груповій цілі за дальністю і напрямком;

$$\Gamma_Y^* = (1 - \sqrt{\Delta n})\Gamma_Y + \Gamma_V, \quad \Phi_Y^* = (1 - \sqrt{\Delta n})\Phi_Y + \Phi_V, \quad (39)$$

умовні розміри цілі за фронтом і глибиною у випадку, коли гармати на ВП розміщені уступом вперед (назад), ромбом та іншими способами; Δn – математичне сподівання частки площі цілі, що накрыта зоною ураження для n виявлених гармат [1], обирається з табл. 3;

$$\begin{aligned} \Gamma_{3PP} &= \sqrt{26.4B_{\partial 3}^2 + (n_{\Gamma}^2 - 1)h_x^2}, \\ \Phi_{3PP} &= \sqrt{26.4B_{\sigma 3}^2 + (n_{\Phi}^2 - 1)h_z^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Таблиця 3

Ймовірність накрыття сабатр противника зоною ураження в залежності від числа виявлених гармат

n	1	2	3	4	5	6
Δn	0.56	0.71	0.82	0.92	0.98	1

3.3. Розрахунок ступеня ураження сабатр

Вихідні дані: ціль – сабатр противника ($n=6$); елемент ураження – самохідні неброньовані гармати; бойовий порядок батареї противника – уступом назад, фронт Φ і глибина Γ ВП визначені за даними повітряної розвідки 300×150 м; розвідано дві гармати.

До ураження батареї противника залучається артилерійський дивізіон 152-мм СГ 2С3 (3 батареї по 6 гармат, всього гармат – 18). Витрата снарядів – 24 на гармату, дальність стрільби 8 км.

Для розрахунків скористаємось даними з табл. 4 [14]

Таблиця 4

Величини зведених серединних помилок для повної підготовки

Артилер. система	Дальність, км	Зведені середні помилки під час стрільби дивізіоном, м			
		$B_{\partial 3}$	$E_{\partial 3}$	$B_{\sigma 3}$	$E_{\sigma 3}$
152-мм СГ 2С3	4	33	42	17	33
	6	39	43	18	34
	8	38	58	19	35
	10	48	63	21	38
	12	70	77	24	42
	14	73	89	28	47
16	79	99	28	52	

1. Так як виявлено $n=2$ гармати, то згідно з табл. 1 і (39) отримаємо умовні розміри цілі по фронту $\Phi_Y^* = 232$ м і глибині $\Gamma_Y^* = 174$ м.

2. Зведені серединні помилки підготовки та розсіювання $E'_{\partial 3}$, E'_{H3} , $B_{\partial 3}^2$, $B_{\sigma 3}^2$ за дальністю стрільби 8 км для зразка озброєння 152-мм СГ 2С3 відшукуємо за табл. 4: $E'_{\partial 3} = 58$ м; $E'_{H3} = 35$ м; $B_{\partial 3} = 38$ м; $B_{\sigma 3} = 19$ м.

Підставивши отримані величини у (4), визначимо зведені серединні помилки під час стрільби по груповій цілі за дальністю і напрямком: $E'_{\partial 3} = 67$ м; $E'_{H3} = 57$ м.

4. Зону рівномірного розподілу точок падіння снарядів підраховуємо за формулою (6) за числом установок прицілу $n_{\Gamma} = 3$, числом установок кутотіра $n_{\Phi} = 6$ (за числом гармат), відстань між точками прицілювання $h_x = 50$ м за дальністю і $h_z = 33$ м за напрямком, маємо: $\Gamma_{3PP} = 241$ м; $\Phi_{3PP} = 218$ м. Остаточно знаходимо шукану ймовірність P_{θ} за формулою (37) – $P_{\theta} = 0.3879$.

5. Умовну ймовірність ураження сабатр противника за умови, що ціль накрыта зоною рівномірного розсіювання, знайдемо за формулою [10, 14]

$$P_y = 1 - e^{-\frac{NS_3}{\Gamma_{3PP}\Phi_{3PP}}}. \quad (41)$$

Загальна витрата снарядів на ураження цілі, згідно з умовою задачі $N = 3 \cdot 6 \cdot 24 = 432$ снарядів.

Зведену зону ураження знаходимо за табл. 5 [14] $S_3 = 135$ м², тоді з (41) $P_y = 0.6959$.

Таблиця 5

Середні значення зведених зон ураження самохідних гармат

Калібр	Дальність стрільби, км	Середні значення зведених зон ураження S_3 , м ²	
		самохідних броньованих гармат	самохідних неброньованих гармат
152 мм	4	68	160
	8	53	145
	12	56	150
	16	51	150

3 формули (35) визначаємо математичне сподівання відносного числа уражених окремих цілей зі складу групової $M = 0.2699$.

Ймовірність своєчасності вогню визначаємо за формулою $P_{ci}^* = P_c \cdot P_{i4}$, ($i = 1, 2, 3$), а показник ураження батареї – $M^* = M \cdot P_c^*$.

У табл. 6 наведені дані ймовірності своєчасності відкриття вогню. Графічно зміна

показника ефективності ступеня ураження батареї противника проілюстрована на рис. 2.

Таблиця 6

Значення показника ефективності ураження батареї противника

t , хв.	P_{14}^*	P_{24}^*	P_{34}^*
1	0.089	0.094	0.259
2	0.165	0.177	0.432
3	0.23	0.249	0.548
4	0.285	0.312	0.626
5	0.332	0.366	0.678
6	0.372	0.412	0.713
7	0.406	0.452	0.736
8	0.435	0.485	0.752
9	0.46	0.513	0.763
10	0.481	0.536	0.77

Отримані розрахунки дають можливість відповісти на поставлене питання задачі – визначення ступеня ураження *сабатр*.

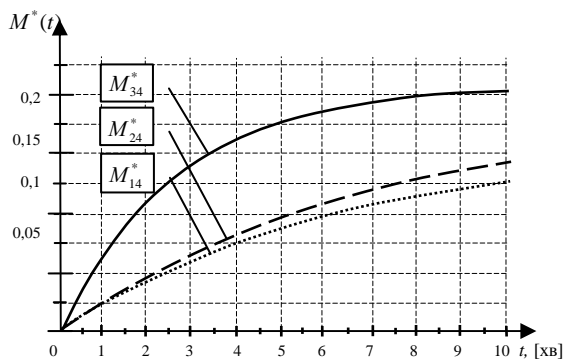


Рис 2. Зміна показника ефективності ураження *сабатр* противника

Висновки

У статті наведена математична модель бойового функціонування самохідної артилерійської батареї на вогневій позиції з урахуванням своєчасності її виявлення, опис функціонування якої заданий напівмарківським процесом і системою лінійних інтегральних рівнянь. Отримана загальна формула для визначення своєчасності вогню по цілі. За умови, що час перебування цілі на ВП розподілений за нормальним законом, а час підготовки до ураження – за показниковим, знайдено розрахункові співвідношення, які дозволяють спрогнозувати ураження артилерійської батареї з урахуванням своєчасності її виявлення.

Аналіз отриманих розрахунків, в рамках поставленої задачі, надає можливість зробити наступні висновки:

1. Вирішальними факторами при ураженні *сабатр* противника є ймовірність її своєчасного виявлення і час на підготовку вогневого нальоту. Найбільший ступінь ураження *сабатр* спостерігається

за умови її виявлення в станах S_1 (батарея зайняла ВП і розгорнулась в бойовий порядок) або S_2 (батарея виконала вогневе завдання).

2. Необхідно зробити більш жорсткими вимоги до системи управління підрозділами, тобто з метою зменшення часу підготовки вогневого нальоту необхідно зменшити час на розвідку, прийняття рішень і передачу даних на ВП. Виникає необхідність комплексування засобів розвідки та управління.

3. Наведена математична модель може бути узагальнена на низку аналогічних задач, наприклад, для дослідження ефективності ураження засобів розвідки, КСП, ПТРК, батарей причіпних гармат і т.д.

Таким чином, розглянута задача і її розв'язок вказують на широкі можливості застосування математичного моделювання у дослідженні різноманітних проблем військової справи. Кількісні оцінки, отримані в результаті моделювання, дозволяють командирам і штабам раціонально використовувати бойові можливості частин (підрозділів) в бойових діях (боях), знаходити оптимальні варіанти їх використання, краще прогнозувати тактичну обстановку і приймати найбільш вірні рішення.

Перспективним напрямом подальших досліджень є розробка математичних моделей оптимального розподілу засобів ураження двостороннього бою між протидіючими неоднорідними угрупованнями на основі метода максимального елемента (градієнтний метод).

Список літератури

1. Барковский А.Ф. Основы оценки эффективности и выработки рекомендаций по поражению целей огнем артиллерии / А.Ф. Барковский. – П.: ВАУ, 2000. – 310 с.
2. Карлин С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин. – М.: Мир, 1971. – 535 с.
3. Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложения / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1976. – 181 с.
4. Ануреев И.И. Применение математических методов в военном деле / И.И. Ануреев, А.Е. Татарченко. – М. Воениздат, 1979. – 159 с.
5. Королюк В.С. Стохастические модели систем / В.С. Королюк. – К.: Наукова думка, 1989. – 203 с.
6. Правила стрільби і управління вогнем артилерії. – К.: Варта, 1995. – 305 с.
7. Мазуренко В.О. Збірник таблиць для розрахунку ймовірностей, підготовки й оцінки ефективності стрільби та прийняття рішень у військовій справі / В.О. Мазуренко, Ю.І. Свідлов, В.М. Супрун. – С.: СумДУ, 2005. – 164 с.
8. Чжун-Кай-Май. Однородные цепи Маркова. – М.: Мир, 1964. – 426 с.
9. Городнов В.П. Моделирование боевых действий частей, соединений, объединений войск ПВО / В.П. Городнов. – Х.: АПО, 1987. – 378 с.

10. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / операции. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.
 Б.В. Гнеденко. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
 11. Вентцель Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. – М.: Сов. радио, 1972. – 550 с.
 12. Максимов Ю.Д. Вероятностные разделы математики / Ю.Д. Максимов. – СПб.: Ив. Федоров, 2001. – 592 с.
 13. Абчук В.А. и др. Справочник по исследованию операций. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.
 14. Стрельба наземной артиллерии. Учебник. – М.: МО, 1962. – 367 с.

Рецензент: д.т.н., с.н.с. М.Ю. Яковлев, Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОРАЖЕНИЯ АРТИЛЛЕРИЙСКОЙ БАТАРЕИ ПРОТИВНИКА С УЧЕТОМ СВОЕВРЕМЕННОСТИ ЕЕ ВЫЯВЛЕНИЯ

В.И. Грабчак, В.Н. Супрун, А.Н. Заскока, Б.И. Сокол

В статье приведена математическая модель функционирования самоходной артиллерийской батареи на огневой позиции с учетом своевременности ее выявления, описание функционирования которой, заданный полумарковским процессом и системой линейных интегральных уравнений. Получена общая формула для определения своевременности открытия огня по цели, найдены расчетные соотношения при условии, что время пребывания цели на огневой позиции распределено за нормальным законом, а время подготовки к поражению – за показательным. Проведен расчет показателя эффективности степени поражения самоходной артиллерийской батареи противника.

Ключевые слова: полумарковский процесс, самоходная артиллерийская батарея, математическая модель, показатель эффективности артиллерийского огня, функция распределения, своевременность открытия огня.

ANALYTICAL MODEL OF ENEMY'S ARTILLERY BATTERY ENGAGEMENT WITH ACCOUNT FOR TIMELINESS OF ITS DETECTION

V. Hrabchak, V. Suprun, A. Zaskoka, B. Sokil

The article presents mathematical model of self-propelled artillery battery on fire position functioning with account for timeliness of its detection, description of its functioning is given by semi-Markov processes and system of linear integral equations. General formula for defining timeliness of fire engagement is obtained, design ratios on condition that target time on fire position is distributed by normal law, and time for engagement preparation by exponential rule are found. Calculation of effectiveness indicator of enemy's self-propelled artillery battery damage level is done.

Key words: semi-Markov process, self-propelled artillery battery, mathematical model, artillery fire effectiveness indicator, distribution function, timeliness of fire engagement.

УДК 629.047

Ю.В. Шабатура, І.Б.Мількович

Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧІ ТА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ КОНТРОЛЮ АДЕКВАТНОСТІ УПРАВЛІННЯ НАЗЕМНИМИ РУХОМИМИ ОБ'ЄКТАМИ

Розглянуто формалізацію роботи мікропроцесорної системи контролю адекватності управління наземними рухомими об'єктами (СКАУ НРО) механіком-водієм. Створено математичну модель функціонування СКАУ НРО.

Ключові слова: адекватність управління, система контролю, математична модель системи контролю.

Постановка проблеми

У статті [1] проаналізовано світові тенденції розвитку систем контролю адекватності управління наземною рухомою військовою технікою.

Управління військовими наземними рухомими об'єктами – дуже складний та непередбачуваний процес. Механік-водій повинен знаходитись в стані постійної готовності до адекватного реагування на дорожню ситуацію та