УДК 534.111

Б.І. Сокіл

*Академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів*

# ЗГИННІ НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ГУСЕНИЧНОГО ОБОДУ ВГМ ТА МЕТОДИКА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

*Запропоновано методику дослідження нелінійних згинних коливань гусеничного ободу (ГО) військових гусеничних машин (ВГМ). Методика базується на поєднанні: хвильової теорії руху; принципу одночастотності коливань у нелінійних системах; ідей методів збурень. У сукупності вказане дозволяє отримати двопараметричну множину розв'язків, які визначають вплив на динамічний процес ГО швидкості поздовжнього руху та його фізико-механічних характеристик.*

***Ключові слова**: гусеничний обід, згинні коливання, хвильові числа, амплітуда, частота.*

## Актуальність теми

У межах лінійної теорії коливань не вдається пояснити цілу низку явищ, які мають місце у реальних механічних системах. В той же час математичний апарат дослідження нелінійних аналогів систем розроблений частково тільки для так званих квазілійних систем [1-3] обмеженої довжини та систем із степеневою нелінійністю [4]. Для таких систем на основі загальних ідей методів збурень [5,6] чи їхніх модифікацій вдається побудувати асимптотичні наближення, які достатньо адекватні динамічному процесу. Що стосується ГО ВГМ, то вони характеризуються поздовжньою складовою швидкості руху. Останнє не дозволяє навіть для спрощених (лінійних) їх математичних моделей використати класичні методи дослідження рівнянь із частинними похідними Фур'є чи Д'Аламбера. В той же час дослідження, побудовані на застосуванні наближеного аналітичного методу Бубнова-Гльоркіна [2] з подальшим знаходженням асимптотичних наближень для звичайних нелінійних рівнянь, не враховують форми динамічного профілю ГО, а тільки крайові умови. Це певною мірою спотворює картину реального динамічного процесу. Чисельне ж інтегрування рівнянь руху хоча дає відносно повну картину руху при заданих параметрах, однак навіть у випадку стійких розв'язків не дає можливості передбачити, наприклад, умови зриву коливань, чи резонансу. У зв'язку із наведеним нижче розвивається підхід, який певною мірою враховує наведені недоліки. Він базується на хвильовій концепції руху та розвитку на її базі методів збурень.

## Постановка проблеми

Верхню частину ГО можна моделювати як одновимірне тіло із постійно розподіленою вздовж його довжини масою. В такому разі диференціальне рівняння, яке описує нелінійні згинні коливання вказаної моделі ГО, за умови сталої складової швидкості його поздовжнього руху $V$ має вигляд

$$\begin{aligned} & u_{tt} + 2Vu_{xt} - (\alpha^2 - V^2)u_{xx} + \beta^2 u_{xxxx} = \\ & = f(x, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) \end{aligned} \tag{1}$$

В (1) $u(x,t)$ - функція, яка описує відхилення від рівноважного положення недеформованої осі ГО із Ейлеровою координатою $x$ в довільний момент часу $t$ у напрямку, перпендикулярному до останньої, $\alpha^2 = \dfrac{S}{m}$, $\beta^2 = \dfrac{EI}{m}$ $S$, та $m$ - відповідно сила натягу та погонна маса ГО, $EI$ - його згинна жорсткість, $f(x, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ - відома аналітична функція, яка враховує відхилення пружних властивостей матеріалу від лінійного закону, сили опору та інші нелінійні сили. Малий же параметр у правій частині наведеного рівняння $\varepsilon$ вказує на наступне: максимальне значення нелінійних сил у порівняні із лінійною складовою відновлюючої сили є величиною порядку $\varepsilon$. Наведене є лише необхідною умовою застосування методів збурень для дослідження нелінійних коливальний процесів систем. Їх достатньо ефективно використовують тільки за умови, коли вдається описати динамічний процес у лінійних аналогах систем. В нашому випадку - коливань ГО за умови, що рух його описується рівнянням

$$\bar{u}_{tt} + 2V\bar{u}_{xt} - (\alpha^2 - V^2)\bar{u}_{xx} + \beta^2 \bar{u}_{xxxx} == 0\,. \tag{2}$$

Із знаходженням розв'язку саме цього рівняння пов'язані основні проблеми дослідження поперечних коливань ГО та й іншого типу суцільних середовищ, які характеризуються сталою складовою швидкості поздовжнього руху та жорсткістю на згин. До того ж динамічний процес у них суттєво залежить від крайових умов. Для ГО - виду контакту із ведучим та натяжним колесами. Поступаючись строгістю формулювань останніх, зберігши при цьому основну сутність фізичного процесу, вважатимемо їх у вигляді

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0. \qquad (3)$$

Треба відзначити: а) крайові умови (3) еквівалентні умовам безвідривного контакту ГО у точках дотику його до вказаних коліс; б) у літературі, зазвичай, моделюючи процес у ГО як згині коливання балки, розглядають “балочного” типу крайові умови, наприклад,

$$\begin{aligned} u(x,t)\big|_{x=0} &= u_{xx}(x,t)\big|_{x=0} = 0, \\ u(x,t)\big|_{x=l} &= u_{xx}(x,t)\big|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

На думку автора роботи, такий підхід дещо втрачає у сутності фізичного процесу, зокрема, неперервного розподілу перерізуючої сили та згинального моменту вздовж всієї верхньої вітки ГО.

## Мета дослідження

Полягає у розробленні методики знаходження розв’язку рівняння (1) за крайових умов (2), який би дозволив визначити вплив фізико-механічних, кінематичних та інших параметрів на динаміку процесу ГО та одночасно був би зручним для інженерних розрахунків.

В основу побудови розв’язку вказаної задачі покладено: принцип одночастотності коливань у нелінійних системах із багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами [7]; основну ідею хвильової теорії руху [8,9]; поширення на базі вказаного вище методу Ван-дер-Поля на нові класи динамічних систем. Таким чином, поперечні коливання лінійної моделі ГО будемо описувати залежністю

$$\bar{u}(x,t) = a\cos(\kappa x + \omega t + \varphi) + b\cos(\chi x - \omega t + \psi), \qquad (4)$$

де $a$, $b$, $\kappa$, $\chi$, $\varphi$, $\psi$ - відповідно амплітуди, хвильові числа, початкові фази прямої та відбитої хвиль, $\omega$ - їх частота. Для знаходження всієї множини параметрів із крайових умов при $x = 0$ та $x = l$ отримуємо відповідно рівняння

$$\begin{aligned} a\cos(\omega t + \varphi) + b\cos(\omega t - \psi) &= 0, \\ a\cos(\kappa l + \omega t + \varphi) + b\cos(\chi l - \omega t + \psi). \end{aligned} \qquad (5)$$

Вони будуть виконуватись для довільного моменту часу $t$, якщо між параметрами хвиль має місце зв’язок: $a = -b$, $\varphi = -\psi$, $\kappa + \chi = 2k\pi / l$. До того ж залежність (4) буде розв'язком рівняння (3), якщо справджуються дисперсійні співвідношення

$$\begin{aligned} \omega^2 + 2V\kappa\omega - (\alpha^2 - V^2)\kappa^2 - \beta^2\kappa^4 &= 0, \\ \omega^2 - 2V\chi\omega - (\alpha^2 - V^2)\chi^2 - \beta^2\chi^4 &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Таким чином, динамічний процес розглянутої лінійної моделі ГО проходить за сталих значень частоти та амплітуди, причому значення останньої визначається початковими умовами. Нижче, на рис. 1 та рис. 2 представлені залежність головної частоти згинних коливань гусеничного ободу від параметру $\beta$ (згинної жорсткості) за швидкості поздовжнього руху 5 $м/с$ та $l = 1$ $м$.

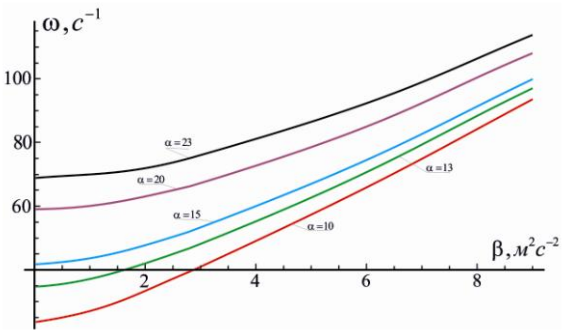


*Рис. 1.* **Залежність частоти згинних коливань ГО “жорсткості”**

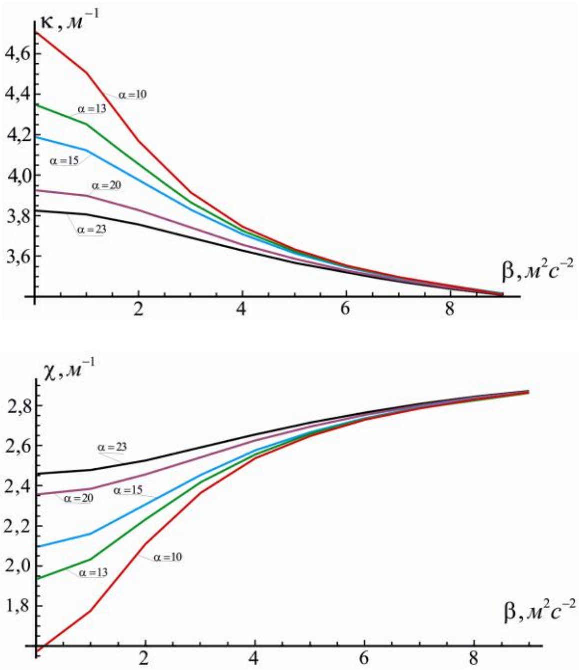


*Рис. 2.* **Залежність хвильових чисел від ГО “жорсткості”**

Отримані та побудовані на їх базі графічні залежності показують: а) для більших значень сталої складової швидкості поздовжнього руху частота власних згинних коливань ГО $\omega$ та хвильве число $\chi$ є меншими, а хвильове число $\kappa$ - більшим; б) значні швидкості руху ВГМ призводять до зриву коливань, див. рис.3 (аналог втрати стійкості стиснутої балки).

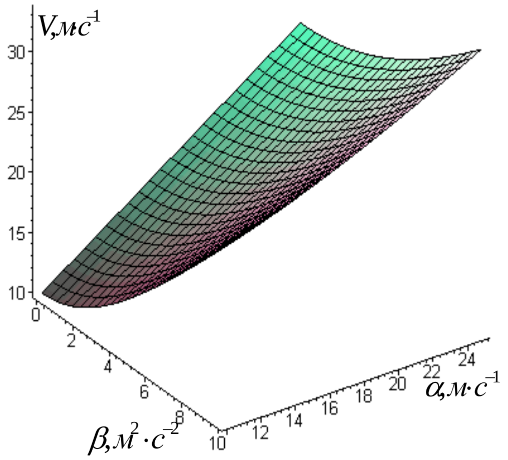


*Рис. 3.* **Залежність критичної швидкості руху ГО від сил “натяку” та “жорсткості”**

Для знаходження впливу нелінійних сил на динаміку процесу можна використовувати різні модифікації методів збурень. Відносно простим, одночасно зручним для інженерних досліджень є метод, в основі якого лежить основна ідея методу Ван-дер-Поля. Відповідно до неї, співвідношення

$$u(x,t) = a(\cos(\kappa x + \omega t + \varphi) - \cos(\chi x - \omega t - \varphi)) \tag{6}$$

можна трактувати за розв’язок рівняння (1), яке описує нелінійні згинні коливання ГО з тією лише різницею, що для останнього випадку параметри $a$ та $\varphi$ будуть функціями часу.

**Примітка.** Тут припускається, що вздовж довжини верхньої частини ГО амплітуди хвиль не зміняться (не залежать від змінної $x$). Цей випадок має назву випадку коротких систем.

Для знаходження закону зміни вказаних функцій, шляхом диференціювання (6) за часом, отримуємо

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= (\cos(\kappa x + \omega t + \varphi) - \cos(\chi x - \omega t - \varphi))\frac{da}{dt} - \\ &- a(\sin(\kappa x + \omega t + \varphi) + \sin(\chi x - \omega t - \varphi))\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Приймаючи до уваги, що для незбуреного випадку $u_t(x,t)$ визначається залежністю

$$u_t(x,t) = -a\omega(\sin(\kappa x + \omega t + \varphi) + \sin(\chi x - \omega t - \varphi)), \tag{8}$$

та той факт, що малі сили автономного типу спричиняють у ГО малі зміни амплітуди та фази хвильового процесу, із залежностей (7) та (8) маємо перше рівняння, яке зв’язує закони зміни невідомих параметрів $a(t)$ та $\varphi(t)$

$$\begin{aligned} &(\cos(\kappa x + \omega t + \varphi) - \cos(\chi x - \omega t - \varphi))\frac{da}{dt} - \\ &- (\sin(\kappa x + \omega t + \varphi) + \sin(\chi x - \omega t - \varphi))\frac{d\varphi}{dt} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Наступним диференціюванням залежності (7) із урахуванням (9) отримуємо

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= -\frac{da}{dt}\omega(\sin(\kappa x + \omega t + \varphi) + \sin(\chi x - \omega t - \varphi)) - \\ &- a\omega\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)(\cos(\kappa x + \omega t + \varphi) - \cos(\chi x - \omega t - \varphi)) \end{aligned} \tag{10}$$

Отримані співвідношення дозволяють із вихідного рівняння (1) та (9) визначити звичайні диференціальні рівняння, які описують закони зміни амплітуд та фаз хвильового процесу ГО у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{l\left((\omega + \kappa V)^2 + (\omega - \chi V)^2\right)} \times \\ &\times \int_0^l \left(f_1^c(a,x)\Delta_1(x) + f_1^s(a,x)\Delta_2(x)\right)dx, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varepsilon}{l\left((\omega + \kappa V)^2 + (\omega - \chi V)^2\right)a} \times \\ &\times \int_0^l \left(f_1^s(a,x)\Delta_1(x) - f_1^c(a,x)\Delta_2(x)\right)dx, \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\Delta_1(x) = (\omega + \kappa V)\sin \kappa x + (\omega - \chi V)\sin \chi x,$$
$$\Delta_2(x) = (\omega + \kappa V)\cos \kappa x - (\omega - \chi V)\cos \chi x,$$
$$f_1^s(a,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a,x,\phi)\sin \phi \, d\phi,$$
$$f_{i1}^c(a,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a,x,\phi)\cos \phi \, d\phi, \quad \phi = \omega t + \varphi,$$

а $f_1(a,x,\phi)$ відповідає значенню правої частини рівняння (1) за умови, що $u(x,t)$ та її похідні визначаються відповідно до (6) та (8).

Крайові задачі для рівняння (2), які розглядаються, є лінійними однорідними, тому на базі отриманого легко записати загальний їх розв’язок. Множина ж параметрів $a(0)$ та $\varphi(0)$ для вказаного випадку визначається із початкових умов. Така задача може бути предметом окремих досліджень.

**Висновки.** Викладена у роботі методика та приведені на її базі розрахункові залежності показують:

- нехтування згинною жорсткістю та поздовжньою складовою швидкості поздовжнього руху ГО приводить до значних неточностей описання динамічного процесу у ній;
- одночасно із збільшенням швидкості руху ВГМ частота власних згинних коливань зменшується. Вказане особливо важливо враховувати при дії на ГО зовнішнього періодичного збурення чи русі ВГМ по пересіченій місцевості.

## Список літератури

*1. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. П. Витт, С. Э. Хайкин. – М. : Наука, 1981. – 568 с.*

2. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков – М. : Наука, 1968. – 560 с.

3. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М. : Наука, 1974. – 501 с.

4. Сокил Б.И. О построении асимптотических приближений для неавтономного волнового уравнения / Б.И. Сокил // Укр. мат. журн. – 1995. – № 12 (47). – С. 1714–1716.

5. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Джулиан Коул; [пер. с англ. А.И. Державиной и В.Н. Диесперова, под ред. О.С. Рыжова]. – М. : Мир, 1972. – 276 с.

6. Найфе А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфе. – М. : Мир, 1976. – 456 с.

7. Митропольский Ю.А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков. – К. : Вища школа, 1976. – 589 с.

8. Сокіл М.Б. Згинні коливання гнучких елементів систем приводів і структура розв'язку їх математичних моделей / М.Б. Сокіл // Вісник НЛТУ України. – 2012. – Вип. 22.1. – С. 144–147.

9. Chen L. Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings / L. Q. Chen // Appl. Mech. Rev. – 2005.– Volume 58.2. – P. 91–116.

**ИЗГИБНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГУСЕНИЧНОГО ОБОДА ВГМ И МЕТОДИКА ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ**

Б.И. Сокил

*Предложено методику исследования нелинейных изгибных колебаний гусеничного обода (ГО) военных гусеничных машин (ВГМ). Методика базируется на сочетании: волновой теории движения; принципа одночастотности колебаний в нелинейных системах; идей методов возмущений. В совокупности указанное позволяет получить двухпараметрическое множество решений, которые определяют влияние на динамический процесс ГО скорости продольного движения и его физико-механических характеристик.*

***Ключевые слова:*** *гусеничный обод, изгибные колебания, волновые числа, амплитуда, частота.*

**FLEXURAL NONLINEAR VIBRATIONS OF CATERPILLAR RIM AND METHOD OF THEIR RESEARCH**

B. Sokil

*The method of research of nonlinear flexural vibrations of caterpillar rim (GO) of soldiery caterpillar machines is offered (VGM). A method is based on combination: to the wave theory of motion; principle of odnochastotnosti vibrations in the nonlinear systems; ideas of methods of indignations. The in an aggregate indicated allows to get the two-parameter great number of decisions, which determine influence on the dynamic process of GO, rates of longitudinal movement and his fiziko-mechanical descriptions.*

***Key words:*** *caterpillar rim, flexural vibrations, wave-numbers, amplitude, frequency.*

---

УДК: 528.9

В.М. Тарасов[1], Ю.М. Бусяк[2], Ю.В. Мірошніченко[2], В.В. Яковенко[3], О.В. Корольова[3]

*[1] Національний університет оборони України, м. Київ*
*[2] ДП «ХКБМ» ім. Морозова, м. Харків*
*[3] Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів*

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ ПОХИБКИ ВИЗНАЧЕННЯ ВИСОТИ ПРИ ЗОВНІШНЬОМУ ЦІЛЕВКАЗУВАННІ В АРТИЛЕРІЙСЬКОМУ ПІДРОЗДІЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІТАЮЧОЇ ПЛАТФОРМИ

*В роботі запропоновано алгоритм визначення висоти розташування цілі за допомогою літаючої платформи. Проведено аналіз похибок при її визначенні. Досліджено залежність похибок визначення висоти цілі від взаємного розташування пункту спостереження, платформи та цілі.*

***Ключові слова:*** *висота, літаюча платформа, оцінка похибок.*

## Постановка проблеми

Артилерія сьогодні є основою вогневої могутності загальновійськових угруповань. Вогневе ураження противника на великих відстанях набуває усе більшого значення в умовах сучасного бою. Для досягнення цих умов військовими фахівцями провідних країн світу розглядається використання