УДК 534.1+62-5

Б.І. Сокіл, О.І. Хитряк

*Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів*

# ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ, РУХ ЯКИХ ОПИСУЄТЬСЯ КВАЗІЛІНІЙНИМИ ГІПЕРБОЛІЧНИМИ РІВНЯННЯМИ

*Розроблено методику розв'язування обернених задач динаміки, які описуються нелінійними рівняннями з частинними похідними із квазілінійними крайовими умовами. Методика дає можливість визначити апроксимацію нелінійних характеристик умов закріплення системи, виходячи із заданого закону зміни основних параметрів коливань. В основу розробленої методики покладено принцип одночастотності коливань у нелінійних системах із зосередженими масами та розподіленими параметрами, асимптотичні методи нелінійної механіки Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ) та ідея оптимальності аналітичної апроксимації нелінійних силових факторів.*

***Ключові слова:*** *нелінійні коливання, амплітуда, частота, асимптотичний метод.*

## Актуальність і аналіз публікацій

Відомо [1-2], що динамічні процеси у механічних системах із розподіленими параметрами однозначно визначаються діючими силами, початковими та крайовими умовами. Такі задачі стосовно коливальних систем у лінійній та нелінійній постановках розглядались у низці публікацій, зокрема в [3-6]. Для багатьох прикладних задач машинобудування, в тому числі і військової оборонної промисловості, є не менш важливими щодо описання силових чинників на базі руху тієї чи іншої системи. До них близькими за постановкою є задачі програмного руху, тобто визначення таких силових чинників, які у системі спричиняють заданий рух [6-8]. На відміну від першого класу задач (прямих) другий тип задач (обернені) не завжди характеризуються єдиністю розв'язку [9]. Останнє спонукає для їх вирішення до накладання додаткових обмежень щодо сил. Такі задачі частково розглядались для систем із зосередженими масами та для найпростіших систем із розподіленими параметрами [6-8, 10]. Метою даної роботи є побудова на базі руху системи оптимальної апроксимації силових чинників, які діють у фіксованих точках системи.

## Постановка задачі

Математичною моделлю динамічних процесів одновимірних пружних, а також гнучких тіл малої згинної жорсткості є мішана крайова задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varepsilon f\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right). \qquad (1)$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right)\right|_{x=0}=\varepsilon\eta\left.\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)\right|_{x=0};$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+h_1 u\right)\right|_{x=l}=\varepsilon\xi\left.\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)\right|_{x=l} \qquad (2)$$

У (1) $u(x,t)$ – поздовжнє (поперечне) переміщення перерізу середовища з координатою $x$ в довільний момент часу $t$; $\alpha$ — стала, яка визначається через фізико-механічні характеристики досліджуваного об'єкта; $h, h1$ — деякі константи, $f\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)$ – відома функція, яка описує нелінійні сили середовища; $\varepsilon>0$ — малий параметр вказує на незначне максимальне значення нелінійних сил у порівнянні із лінійною складовою відновлювальної сили. Функції, що описують умови закріплення, тобто

$$\eta\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right),\ \xi\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right),$$

необхідно знайти таким чином, щоб закон зміни основних параметрів руху системи був заданим.

## Методика розв'язування

Сформульована вище задача описує коливальні процеси одновимірних тіл. Основні параметри, які їх характеризують — це амплітуда $a$ та частота $\Omega$ (період $T$) коливань. Закони зміни в часі цих параметрів утворюють програму руху. Їх можна визначати послідовністю значень $a_1, a_2, \ldots, a_N$; $T_1, T_2, \ldots, T_N$ або функціями $a(t)$ і $T(t)$. Нижче вважатимемо, що закони зміни вказаних параметрів задані дискретними значеннями вказаних величин. Як показано у [7-8], від дискретного представлення законів зміни амплітуди і періоду коливань можна перейти до диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a); \quad \frac{d\psi}{dt} = \Omega = \omega + \varepsilon B(a), \qquad (3)$$

в яких $\psi$ — фаза коливань, $\omega$ — стала (власна частота лінійної моделі коливань); *A(a)* та *B(a)* вважаємо поліномами відомих степенів.

З урахуванням того, що $\varepsilon$ — малий параметр, для розв'язування поставленої задачі використовуємо загальні ідеї методів збурень [11-12]. Відповідно до них розглянемо спочатку незбурену *(ε=0)* задачу, що відповідає задачі (1), (2), а саме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Bigg|_{x=0} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_1 u\right)\Bigg|_{x=l} = 0\,. \qquad (5)$$

Множина одночастотних розв'язків задачі (4)-(5) описується залежністю

$$u_0(a,x,\psi) = a\left[\cos(\kappa_1 x) - \frac{h}{\kappa_1}\sin(\kappa_1 x)\right]\cos(\omega t + \varphi), \quad (6)$$

де $\varphi$ – фаза, $\kappa_1$ – хвильове число, що є розв'язком трансцендентного рівняння

$$tg(\kappa l) = \frac{\kappa(h_1 - h)}{\kappa^2 + hh_1}\,. \qquad (7)$$

У першому наближенні розв'язок збуреної задачі, близький до описаного одночастотного процесу можна записати у вигляді суми

$$u(x,t) = u_0(a,x,\psi) + \varepsilon u_1(a,x,\psi), \qquad (8)$$

де функції $u_0(x,t)$ та $u_1(x,t)$ — $2\pi$ - періодичні по $\psi$, крім цього на $u_1(x,t)$ накладається умова відсутності першої гармоніки.

З урахування наведеного, після підстановки (6)-(8) в (1)-(2), отримуємо диференціальне рівняння, яке зв'язує відомі та невідомі функції

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f_0(a,x,\psi) + \qquad (9)$$

$$+ 2\omega\left[\cos(\kappa_1 x) - \frac{h}{\kappa}\sin(\kappa_1 x)\right]\cdot\left[A(a)\sin\psi + aB(a)\cos(\psi)\right]$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + hu_1\right)\Bigg|_{x=0} = \eta_0(a,x,\psi)\big|_{x=0};$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + h_1 u_1\right)\Bigg|_{x=l} = \xi_0(a,x,\psi)\big|_{x=l}\,, \qquad (10)$$

де $f_0(a,x,\psi) = f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\Bigg|_{u=u_0}$;

$$\eta_0(a,x,\psi)\big|_{x=0} = \eta\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\Bigg|_{\substack{u=u_0\\x=0}};$$

$$\xi_0(a,x,\psi)\big|_{x=l} = \xi\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\Bigg|_{\substack{u=u_0\\x=l}}. \qquad (11)$$

Розв'язок неоднорідної крайової задачі (9)-(10) шукаємо у вигляді суми:

$$u_1(a,x,\psi) = v_1(a,x,\psi) + w_1(a,x,\psi)\,, \qquad (12)$$

де функція $w_1(a,x,\psi)$ є розв'язком одновимірної крайової задачі

$$\frac{\partial^2 w_1(a,x,\psi)}{\partial x^2} = 0\,; \qquad (13)$$

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + hw_1\right)\Bigg|_{x=0} = \eta_0(a,x,\psi)\big|_{x=0};$$

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + h_1 w_1\right)\Bigg|_{x=l} = \xi_0(a,x,\psi)\big|_{x=l} \qquad (14)$$

і має вигляд

$$w_1(a,x,\psi) = \frac{1}{h_1 - h(1+h_1 l)}\left[x(h_1\eta_0(a,x,\psi)\big|_{x=0} - \right.$$

$$\left. - h\xi_0(a,x,\psi)\big|_{x=l}) - (1 + lh_1)\eta_0(a,x,\psi)\big|_{x=0}\right] \qquad (13)$$

(5)

Тоді функція $v(a,x,\psi)$ повинна бути розв'язком рівняння

$$\omega^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \psi^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = f_0^*(a,x,\psi) + \left[2\omega\cos(\kappa_1 x) - \right.$$

$$\left. - \frac{h}{\kappa}\sin(\kappa_1 x)\right]\cdot\left[A(a)\sin\psi + aB(a)\cos(\psi)\right] \qquad (15)$$

і задовольняти вже однорідні крайові умови

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + hv_1\right)\Bigg|_{x=0} = 0; \qquad (16)$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + h_1 v_1\right)\Bigg|_{x=l} = 0\,,$$

де $f_0^*(a,x,\psi) = f_0(a,x,\psi) - \frac{\omega^2}{h_1 - h(1+h_1 l)} \times$

$$\times\left[(xh_1 - lh_1 - 1)\cdot\frac{\partial^2 \eta_0(a,x,\psi)}{\partial \psi^2}\Bigg|_{x=0} + \right.$$

$$\left. + (1+h)\cdot\frac{\partial^2 \xi_0(a,x,\psi)}{\partial \psi^2}\Bigg|_{x=l}\right].$$

Застосовуючи метод Фур'є, знаходимо $v_1$ (14)-(15) у вигляді суми загального розв'язку відповідної однорідної задачі та часткового – неоднорідної

$$v_1(a,x,\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left[\cos(\kappa_n x) - \frac{h}{\kappa_n}\sin(\kappa_n x)\right]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\kappa_n}{\kappa_1}\psi+\theta_n\right)+\sum_{n=1}^{\infty}v_n^{(1)}\left[\cos(\kappa_n x)-\frac{h}{\kappa_n}\sin(\kappa_n x)\right], \quad (17)$$

де $b_n$, $\theta_n$ — довільні константи, $\kappa_n$ — характеристичні числа незбуреної крайової задачі (4)-(5), що задовольняють трансцендентне рівняння (7); $v_n^{(1)}(a,\psi)$ — невідомі коефіцієнти, що забезпечують задоволення крайових умов (16).

Підставляючи (17) в рівняння (15) та прирівнюючи коефіцієнти при фундаментальних функціях $X_n(x)=\cos(\kappa_n x)-\frac{h}{\kappa_n}\sin(\kappa_n x)$ отримуємо рівняння відносно коефіцієнта розкладу $v_1^{(1)}(a,\psi)$

$$\omega^2\left[\frac{\partial^2 v_1^{(1)}}{\partial\psi^2}+v_1^{(1)}\right]=\frac{1}{p}\int_0^l f_0^*(a,x,\psi)\left[\cos(\kappa_1 x)-\frac{h}{\kappa_n}\sin(\kappa_1 x)\right]dx+$$

$$+2\omega\cdot\left[A(a)\sin\psi+aB(a)\cos(\psi)\right], \quad (18)$$

де $p=\int_0^l\left[\cos(\kappa_1 x)-\frac{h}{\kappa_n}\sin(\kappa_1 x)\right]^2 dx$.

Останнє дозволяє зв'язати відомі та невідомі функції у вигляді співвідношень

$$A(a)=\frac{-1}{2\pi\omega p}\int_0^l\int_0^{2\pi}f_0^*(a,x,\psi)\left[\cos(\kappa_1 x)-\frac{h}{\kappa_n}\sin(\kappa_1 x)\right]\sin\psi d\psi dx$$

$$B(a)=\frac{-1}{2\pi\omega ap}\cdot$$

$$\cdot\int_0^l\int_0^{2\pi}f_0^*(a,x,\psi)\left[\cos(\kappa_1 x)-\frac{h}{\kappa_n}\sin(\kappa_1 x)\right]\cos\psi d\psi dx \quad (19)$$

З урахуванням того, що *A(a)* та *B(a)* поліномами відомих степенів, невідомі функції будемо шукати у вигляді аналітичних апроксимацій

$$\eta\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)=\sum_{k=1}^{N}c_k\eta_k\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right);$$

$$\xi\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)=\sum_{k=1}^{M}c_{N+k}\xi_k\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right); \quad (20)$$

де $\eta_k\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)$, $\xi_k\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)$ – лінійно незалежні многочлени; $c_k, d_k$ – коефіцієнти, значення яких необхідно знайти так, щоб амплітудно-частотна характеристика коливань систем, рух яких описується крайовою задачею (1)-(2) змінювалась відповідно до (3).

$$A(a)=\frac{-1}{2\pi\omega p}\int_0^l\int_0^{2\pi}f_0(a,x,\psi)\left[\cos(\kappa_1 x)-\frac{h}{\kappa_1}\sin(\kappa_1 x)\right]\sin\psi d\psi dx+$$

$$+\frac{\omega^2}{h_1-h(1+h_1 l)}\cdot\int_0^l\int_0^{2\pi}\left\{(xh_1-lh_1-1)\sum_{k=1}^{N}c_k\frac{\partial^2\eta_k(a,x,\psi)}{\partial\psi^2}\bigg|_{\substack{x=0\\u=u_0}}+\right.$$

$$\left.+(1+h)\cdot\sum_{k=1}^{M}c_{N+k}\frac{\partial^2\xi_k(a,x,\psi)}{\partial\psi^2}\bigg|_{\substack{x=l\\u=u_0}}\right\}\sin\psi d\psi dx; \quad (21)$$

$$B(a)=\frac{-1}{2\pi\omega ap}\int_0^l\int_0^{2\pi}f_0(a,x,\psi)\left[\cos(\kappa_1 x)-\frac{h}{\kappa_1}\sin(\kappa_1 x)\right]\cos\psi d\psi dx+$$

$$+\frac{\omega^2}{h_1-h(1+h_1 l)}\cdot\int_0^l\int_0^{2\pi}\left\{(xh_1-lh_1-1)\sum_{k=1}^{N}c_k\frac{\partial^2\eta_k(a,x,\psi)}{\partial\psi^2}\bigg|_{\substack{x=0\\u=u_0}}+\right.$$

$$\left.+(1+h)\cdot\sum_{k=1}^{M}c_{N+k}\frac{\partial^2\xi_k(a,x,\psi)}{\partial\psi^2}\bigg|_{\substack{x=l\\u=u_0}}\right\}\cos\psi d\psi dx\cdot$$

Алгебраїчні залежності (21) служать базою для визначення невідомих коефіцієнтів $c_k, d_k$. Якщо система алгебраїчних рівнянь (21) має єдиний розв'язок, то у цьому випадку функції $\{\xi_k\},\{\eta_k\}$ підібрані вдало. У випадку ж, коли співвідношення (21) несумісні при всіх значеннях параметра $a$, то вказана система функцій підібрана некоректно і треба замінити її іншою.

Коли (21) виконуються тільки для окремих значень параметра $a$, тоді шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях $a$ правої і лівої частин вказаних залежностей, отримуємо недовизначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь. У цьому випадку додаткові умови для знаходження невідомих параметрів можна отримати, наприклад, із умови мінімуму функціоналу [13-14], що зв'язаний зі потужністю сил, які діють у фіксованих точках коливальної системи, тобто

$$J_\eta=\int_0^{2\pi}\left[\cos\psi\sum_{k=1}^{N}c_k\eta_k(a,x,\psi)\Big|_{\substack{x=0;\\u=u_0}}\right]^2 d\psi;$$

$$J_\xi=\int_0^{2\pi}\left[\cos\psi\sum_{k=1}^{M}c_{N+k}\xi_k(a,x,\psi)\Big|_{\substack{x=l;\\u=u_0}}\right]^2 d\psi. \quad (22)$$

Нехай алгебраїчні залежності (21) визначають зв'язок між першими $s$ невідомими коефіцієнтами та всіма іншими у вигляді

$$c_i=\mathrm{H}_i(c_{s+1},\ldots,c_{N+M}),\quad i=1,2,\ldots s.,$$

де $\mathrm{H}_i$ — відомі функції.

Функціонал (22) буде приймати мінімальне значення, якщо виконуються умови

$$\frac{\partial J}{\partial c_{s+i}}=\varphi_i(c_{s+1},c_{s+2},\ldots,c_{N+M})=0, \quad (23)$$
$$i=1,2,\ldots,N+M-s.$$

Розв'язуючи сумісну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка випливає із (21) та (23) відносно $c_k$, знаходимо всі невідомі коефіцієнти.

## Висновки

Таким чином, запропонована методика дозволяє побудувати аналітичну апроксимацію нелінійних сил, які діють у фіксованих точках системи із розподіленими параметрами. Її основна ідея може бути також узагальнена і на випадок неперервного задання програми руху та інші критерії функціонування систем.

## Список літератури

*1. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высш. школа, 1970. – 712 с.*

*2. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский – М. : Наука, 1972. – 736 с.*

*3. Сокіл М. Б. Нелінійні моделі рухомих середовищ і аналітичні методи в дослідженні їх коливних процесів / М. Б. Сокіл // Вісник Хмельницького національного університету. – 2006. – № 3. – С. 62–65.*

*4. Сокіл Б. І. Динамічні процеси в рухомих нелінійно пружних системах і методи їх дослідження / Сокіл Б. І., Кузьо І. В., Боженко М. В., Сокіл М. Б. // Вібрації в техніці і технологіях. – 2004. – №3(35). – С. 118–125.*

*5. Мартинців М. П. Хвильові процеси в однорідних нелінійно-пружних системах і методи їх дослідження / М. П Мартинців, Б. І. Сокіл, М. Б. Сокіл // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів : УДЛТУ, 2003. – Вип. 28. – С. 81–89.*

*6. Кононенко В. О. Определение характеристик нелинейных элементов колебательных систем из анализа движения / В. О. Кононенко, Н. П. Плахтиенко // Прикл. мех. – 1969. – V, вип. 10 – С. 1–7.*

*7. Сеник П. М. Одно обобщение обратной задачи асимптотического метода Н. Н. Боголюбова / П. М. Сенник // Изв. ВУЗов. – 1960. – №. 6. – С. 226–232*

*8. Сеник П. М. Визначення функції, яка характеризує розсіювання енергії коливної системи / П. М. Сенник // Прикл. мех. – 1960. – IV, вип. 1 – С. 40–4*

*9. Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики . – М.: Наука, 1981. – 145 с.*

*10. Плахтієнко Н. П. Про визначення нелінійної характеристики коливної системи з аналізу фазової траєкторії // Доп. АН УРСР, сер. А, – 1976 – вип. 4. – С. 336–338.*

*11. Митропольский Ю. А., Моисеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский, Б. И. Моисеенков – К. : ВШ, 1976. – 592 с.*

*12.Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М., 1974. — 408 с.*

*13. Сокіл Б.І., Сокіл М.Б., Хитряк О.І. Один підхід до розв’язання оберненої задачі про нелінійні згинні коливання середовищ // Науковий вісник УкрДЛТУ: зб. наук.-техн. праць – Львів: УкрДЛТУ, 2010. – №20.1. – С.264–268.*

*14.Сокіл Б.І., Хитряк О. І., Обернені задачі динаміки нелінійних систем із розподіленими параметрами та один підхід до їх розв’язання//Науковий вісник УкрДЛТУ: зб. наук.-техн. Праць. – Львів: УкрДЛТУ, 2009. – №19.10 – С.64–67.*

*Надійшла до редакції 22.10.2010 р.*

**Рецензент:** доктор технічних наук, професор І.В. Кузьо, Національний університет «Львівська політехніка», Львів.

### ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ДВИЖЕНИЕ КОТОРЫХ ОПИСЫВАЮТСЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Б. И. Сокил, О. И. Хытряк

*Разработана методика решения обратных задач динамики, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных с квазилинейными краевыми условиями. Методика позволяет определять аппроксимацию нелинейных характеристик условий закрепления системы, исходя из заданного закона изменения основных параметров колебаний. В основу разработанной методики положен принцип одночастотности колебаний в нелинейных системах с сосредоточенными массами и распределенными параметрами, асимптотические методы нелинейной механики Крылова-Боголюбова-Митропольского (КБМ) и идея оптимальности аналитической аппроксимации нелинейных силовых факторов.*

***Ключевые слова:*** *нелинейные колебания, амплитуда, частота, асимптотический метод.*

### INVERSE PROBLEMS OF DYNAMICS FOR NONLINEAR SYSTEMS, THE MOTION DESCRIBED BY QUASI-LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS

B. I. Sokil, O. I. Khytriak

*A method of solving inverse dynamics problems, which are described by nonlinear partial differential equations with nonlinear boundary conditions is developed. The technique allows to determine the approximation of nonlinear characteristics of the conditions of fastening systems on the basis of a given law of variation of the basic parameters of the oscillations. It is based on the principle of single-frequency oscillations in nonlinear systems with lumped mass and distributed parameters, asymptotic methods of nonlinear mechanics of the Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (MSC) and the idea of optimal analytical approximation of nonlinear power factors.*

***Keywords:*** *nonlinear oscillation, amplitude, frequency, asymptotic method.*