УДК 534.1+62-5

Б.І. Сокіл[1], О.І. Хитряк[2]

[1]*Академія сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного, Львів*
[2]*Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Львів*

КОЛИВАННЯ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ПРИВОДУ І МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ЇХ ОПТИМАЛЬНИХ НЕЛІНІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВІ ЗАКОНІВ РУХУ

Розроблено методику розв'язування обернених задач динаміки, які описуються нелінійними рівняннями з частинними похідними, що містять мішану похідну лінійної та часової змінних і є математичними моделями коливань гнучких елементів систем приводу. В основу методики покладено ідею представлення процесу у вигляді хвиль різних довжин, але однакових частот, та узагальнення, на базі вказаного, асимптотичного методу нелінійної механіки на нові класи динамічних систем. Методика дає можливість визначити апроксимацію нелінійних пружних і дисипативних характеристик системи виходячи із заданого закону зміни основних параметрів коливань.

Ключові слова: *нелінійні коливання, амплітуда, частота, асимптотичний метод.*

Актуальність і аналіз публікацій

Аналітичне дослідження динамічних процесів в одно- чи багато вимірних пружних системах, які характеризуються поздовжнім рухом, навіть для лінійних випадків, зв'язане із значними труднощами [1, 2]. На сьогоднішній час існують проблеми пов'язані із побудовою розв'язків лінійних рівнянь з частинними похідними, що містять мішану похідну лінійної і часової змінних та є математичними моделями динамічних процесів досліджуваних систем. Задачі значно ускладнюються для випадку нелінійних моделей систем [3]. Набагато складнішими і не менш важливими є обернені задачі, тобто визначення відповідно до заданого закону руху об'єкту силових чинників, які спричиняють цей закон руху. Складність полягає в тому, що задача не завжди має єдиний розв'язок. Різні підходи до розв'язування обернених задач досліджувалися в [4-6] та ін., проте для систем із розподіленими параметрами вони розглядались лише в окремих випадках. Тому метою даної роботи є описати за допомогою аналітичних співвідношень нелінійні характеристики системи таким чином, щоб її рух відбувався відповідно до заданих (програмних) законів зміни основних параметрів коливань.

Постановка задачі

Відомо [7-12], що коливні процеси одновимірних нелінійно пружних середовищ, що рухаються вздовж своєї геометричної осі із сталою швидкістю описуються диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2V\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\left(\alpha^2-V^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varepsilon f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right). \quad (1)$$

До таких об'єктів належать канатні підвісні дороги, рухомі нитки, стрижні, стрічки носіїв інформації, сипке середовище, вали що обертаються із сталою кутовою швидкістю тощо. У (1) $u(x, t)$ – переміщення перерізу середовища з координатою x в довільний момент часу t; V – швидкість руху (вважаємо, що вона стала); α – стала, яка визначається через фізико-механічні характеристики досліджуваного об'єкту; $f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ – невідома функція, яка описує нелінійні сили середовища; $\varepsilon > 0^0$ – малий параметр вказує на незначну величину нелінійних сил у порівнянні із лінійною складовою відновлюючих.

В [13], показано, що для найпростіших крайових умов

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u(x,t)\big|_{x=l}=0, \quad (2)$$

одночастотний розв'язок незбуреної задачі $(\varepsilon=0)$, тобто функцію $u_0(x,t)$, можна інтерпретувати як накладання двох хвиль (прямої та зворотної) різних довжин

$$u_0(x,t)=a\left[\cos(\kappa x+\psi)-\cos(\chi x-\psi)\right], \quad (3)$$

де $\psi=\omega t+\varphi$, φ – фаза, a – амплітудний параметр.

Сталі κ, χ – хвильові числа прямої та зворотної (відбитої) хвиль $\left(\kappa=\left(\frac{k\pi}{2l}\right)\cdot\left(1+V\alpha^{-1}\right),\right.$ $\left.\chi=\left(\frac{k\pi}{2l}\right)\cdot\left(1-V\alpha^{-1}\right)\right)$, ω – частота

$\left(\omega = \frac{k\pi}{2l}\frac{\alpha^2 - V^2}{\alpha}\right)$. Використовуючи загальну ідею методу Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ) [14], розв'язок вказаного рівняння за крайових умов (2) у першому наближенні запишемо у вигляді суми

$$u(x,t) = u_0(a,x,\psi) + \varepsilon u_1(a,x,\psi), \qquad (4)$$

де функції $u_0(x,t)$ та $u_1(x,t)$ – 2π-періодичні по ψ, крім цього на $u_1(x,t)$ накладаються деякі додаткові умови, які будуть вказані нижче, а параметри a та ψ є функції часу і закони їх зміни задаються програмним рухом. Найбільш зручно визначати a та ψ послідовністю значень амплітуд і періодів коливань, тобто послідовністю величин $a_1, a_2, \ldots, a_N$; $T_1, T_2, \ldots, T_N$. Таким чином задача полягає у знаходженні такої апроксимації правої частини рівняння (1), яка б спричиняла у системі вказані закони зміни основних параметрів руху.

Методика розв'язування

В [15-16] показано, що програма руху системи (множина значень $\{a_i\}$ і $\{T_i\}$) визначає закони зміни в часі параметрів a і T у вигляді диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \varepsilon A(a);\\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B(a).\end{aligned} \qquad (5)$$

Надалі будемо вважати, що $A(a), B(a)$ є поліномами відомих степенів. З врахування наведеного після підстановки (3) в (1), маємо диференціальне рівняння, яке зв'язує невідомі функції

$$L(u_1) = \overline{f}(a,x,\psi) + \rho(x,\psi)A(a) + ah(x,\psi)B(a), \quad (6)$$

де $L(u_1) = \omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + 2V\omega\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial\psi} - \left(\alpha^2 - V^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$;

$$\overline{f}(a,x,\psi) = f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{\substack{u = a\,[\cos(\kappa x+\psi) - \cos(\chi x - \psi)];\\ \frac{\partial u}{\partial x} = a\,[-\kappa\sin(\kappa x+\psi) + \chi\sin(\chi x - \psi)];\\ \frac{\partial u}{\partial t} = a\omega\,[-\sin(\kappa x+\psi) - \sin(\chi x - \psi)].}}$$

$\rho(x,\psi)$, $h(x,\psi)$ —періодичні по ψ функції вигляду

$$\rho(x,\psi) = 2[(\omega+\kappa V)\sin(\kappa x+\psi) + (\omega-\chi V)\sin(\chi x-\psi)]$$

$$h(x,\psi) = 2[(\omega+\kappa V)\cos(\kappa x+\psi) + (\omega-\chi V)\cos(\chi x-\psi)]$$

Виходячи із умов накладених на праві частини диференціальних залежностей (5), невідому функцію $f(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t})$ будемо шукати у вигляді аналітичної апроксимації

$$f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \sum_{k=1}^{N} c_k f_k\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right), \qquad (7)$$

де $f_k(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t})$ – лінійно незалежні многочлени; c_k –коефіцієнти, значення котрих необхідно знайти так, щоб амплітудно-частотна характеристика коливань систем, рух яких описується рівнянням (1) з врахуванням (4), змінювалась відповідно до (6). Легко показати, якщо функція $u_1(a,x,\psi)$ задовольняє однорідному рівнянню, яке випливає із (6), то виконуються співвідношення

$$\int_0^l\int_0^{2\pi} L(u_1)\begin{Bmatrix}\rho(x,\psi)\\ h(x,\psi)\end{Bmatrix} d\psi dx \equiv 0\,. \qquad (8)$$

Приймаючи до уваги умови накладені на функцію $u_1(a, x, \psi)$, в першому наближенні отримуємо співвідношення, що зв'язують невідомі параметри $c_1, \ldots c_N$ та поліноми $A(a)$, $B(a)$

$$2\pi l\left[(\omega+\kappa V)^2 + (\omega-\chi V)^2\right]A(a) = \sum_{k=1}^{N} c_k \int_0^l\int_0^{2\pi} f_k(a,x,\psi)\times$$
$$\times\left(\left[(\omega+\kappa V)\sin\kappa x + (\omega-\chi V)\sin\chi x\right]\cos\psi + \qquad (9)\right.$$
$$\left. + \left[(\omega+\kappa V)\cos\kappa x - (\omega-\chi V)\cos\chi x\right]\sin\psi\right) d\psi\, dx\,;$$

$$a2\pi l\left[(\omega+\kappa V)^2 + (\omega-\chi V)^2\right]B_1(a) = \sum_{k=1}^{N} c_k \int_0^l\int_0^{2\pi} f_k(a,x,\psi)\times$$
$$\times\left(\left[(\omega+\kappa V)\sin\kappa x + (\omega-\chi V)\sin\chi x\right]\sin\psi - \right.$$
$$\left. - \left[(\omega+\kappa V)\cos\kappa x - (\omega-\chi V)\cos\chi x\right]\cos\psi\right) d\psi\, dx\,.$$

Алгебраїчні залежності (9) служать базою для визначення невідомих коефіцієнтів c_k. Якщо вказані співвідношення виконуються при всіх значеннях параметра a і система алгебраїчних рівнянь (9) має єдиний розв'язок, то у цьому випадку функції $\{f_k\}$ підібрані вдало. У випадку ж, коли співвідношення (9) несумісні при всіх значеннях параметра a система функцій $\{f_k\}$ підібрана некоректно і треба замінити її іншою.

Коли (9) виконуються тільки для окремих значень параметра a, тоді шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях a правої і лівої частин вказаних залежностей, отримуємо недовизначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь. У цьому випадку додаткові умови для знаходження невідомих параметрів можна отримати, наприклад, з умови мінімуму функціоналу

$$J = \int_{-a}^{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\left[\sum_{k=1}^{N} c_k \overline{f}_k(a,x,\psi)\right]^2 da\, dx\, d\psi\ . \quad (10)$$

Нехай із (9) можна визначити зв'язок між першими s невідомими коефіцієнтами та всіма іншими у вигляді

$$c_i = \eta_i(c_{s+1},\ldots,c_N), \quad i = 1,2,\ldots s.,$$

де η_i – відомі функції.

З врахуванням вищенаведеного, (10) набирає вигляду

$$J=\int_{-a}^{a}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{l}\left[\sum_{i=1}^{s}\eta_i(c_{s+1},\ldots,c_N)\overline{f}_i(a,x,\psi)+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=s+1}^{N}c_r\overline{f}_r(a,x,\psi)\right]^2 da\,dx\,d\psi. \qquad (11)$$

Функціонал (11) буде приймати мінімальне значення, якщо виконуються умови

$$\frac{\partial J}{\partial c_{s+i}}=\varphi_i(c_{s+1},c_{s+2},\ldots,c_N,a)=0, \qquad (12)$$
$$i=1,2,\ldots,N-s.$$

Розв'язуючи сумісну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка випливає із (9) та (12) відносно c_k, знаходимо всі невідомі коефіцієнти.

Висновки

Таким чином, запропонована методика розв'язування обернених задач динаміки дає можливість визначити нелінійні пружні і дисипативні характеристики сил, виходячи із заданого закону зміни основних параметрів руху і вона може бути узагальнена на деякі інші системи з розподіленими параметрами.

Список літератури

1. *Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов – М. : Высш. школа, 1970. – 712 с.*
2. *Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский – М. : Наука, 1972. – 736 с.*
3. *Харченко Є. В. Вплив періодичного збурення на багаточастотні коливання одновимірних нелінійно пружних середовищ, які характеризуються поздовжнім рухом / Є. В. Харченко, М. Б. Сокіл // Динаміка, міцність та проектування машин і приладів.- Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – Львів. – 2007. – № 588. – С. 81–89.*
4. *Кононенко В. О. Определение характеристик нелинейных элементов колебательных систем из анализа движения / В. О. Кононенко, Н. П. Плахтиенко // Прикл. мех. – 1969. – V, вип. 10 – С. 1–7.*
5. *Кононенко В. О. Определение петлеобразных характеристик нелинейных колебательных систем из анализа движения / В. О. Кононенко, Н. П. Плахтиенко // Прикл. мех. – 1970. – IV, вип. 9 – С. 9–15.*
6. *Сеник П. М. Застосування и-методики до неавтономної системи з сильною нелінійністю / П. М. Сеник // Доп. АН УРСР. – 1962 – № 9 – С. 1146–1149.*
7. *Сокіл М. Б. Нелінійні моделі рухомих середовищ і аналітичні методи в дослідженні їх коливних процесів / М. Б. Сокіл // Вісник Хмельницького національного університету. – 2006. – № 3. – С. 62–65.*
8. *Мартинців М. П. Одне узагальнення методу Д'Аламбера для систем, які характеризуються поздовжнім рухом / М. П. Мартинців, М. Б. Сокіл //Збірник науково-технічних праць УДЛТУ. – Львів. – 2003. – Вип. 13.4. – С. 64–67.*
9. *Сокіл Б. І. Динамічні процеси в рухомих нелінійно пружних системах і методи їх дослідження / Сокіл Б. І., Кузьо І. В., Боженко М. В., Сокіл М. Б. // Вібрації в техніці і технологіях. – 2004. – №3(35). – С. 118–125.*
10. *Доценко П.Д. Колебание и устойчивость движущейся полосы / П.Д.Доценко // Машиноведение. – 1969. – № 5. – С.18–24.*
11. *Сліпчук А. М. Нелінійні поперечні коливання пружного рухомого канату і методи їх дослідження / А. М. Сліпчук // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів: УДЛТУ, 2003. – Вип.28.– С. 89–94.*
12. *Вікович І. А. Поздовжні коливання рухомої стрічки з урахуванням розсіяння енергії в матеріалі / І. А Вікович, Х. А. Висоцька // Вібрації в техніці та технологіях. – 2005. – № 3(40). – С. 13–17.*
13. *Мартинців М. П. Хвильові процеси в однорідних нелінійно-пружних системах і методи їх дослідження / М. П Мартинців, Б. І. Сокіл, М. Б. Сокіл // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів : УДЛТУ, 2003. – Вип. 28. – С. 81–89.*
14. *Митропольский Ю. А., Моисеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский, Б. И. Моисеенков – К. : ВШ, 1976. – 592 с.*
15. *Сеник П. М. Одно обобщение обратной задачи асимптотического метода Н. Н. Боголюбова / П. М. Сенник // Изв. ВУЗов. – 1960. – №. 6. – С. 226–232.*
16. *Сеник П. М. Визначення функції, яка характеризує розсіювання енергії коливної системи / П. М. Сенник // Прикл. мех. – 1960. – IV, вип. 1 – С. 40–45.*

Надійшла до редколегії 11.09.2009 р.

Рецензент: доктор технічних наук, професор І.Є. Грицай, Національний університет «Львівська політехніка», Львів.

КОЛЕБАНИЯ ГИБКИХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ ПРИВОДА И МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИХ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВЕ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ

Б. И. Сокил, О. И. Хытряк

Разработана методика решения обратных задач динамики, описываемых нелинейными уравнениями с частными производными, содержащих смешанную производную линейной и временной переменных и являющиеся математическими моделями колебаний гибких элементов систем привода. В основу данной методики положена идея представления процесса в виде волн различных длин, но одинаковых частот, и обобщения на базе указанного асимптотического метода нелинейной механики на новые классы динамических систем. Методика позволяет определить аппроксимацию нелинейных упругих и диссипативных характеристик системы, исходя из заданного закона изменения основных параметров колебаний.

Ключевые слова: *нелинейные колебания, амплитуда, частота, асимптотический метод.*

VIBRATIONS OF DRIVE SYSTEMS FLEXIBLE ELEMENTS AND METHODS OF DETERMINING THEIR OPTIMAL NONLINEAR CHARACTERISTICS BASED ON THE LAWS OF MOTION

B. I. Sokil, O. I. Khytriak

A method of solving inverse dynamics problems, which are described by nonlinear partial differential equations is developed. They contain mixed derivative linear and temporal variables and describe the oscillation in drive system flexible elements. It is based on the idea of presentation the process in the form of waves of different lengths, but the same frequency and on the generalizations on the basis of the asymptotic method of nonlinear mechanics to new classes of dynamical systems. This technique allows to specify the approximation of nonlinear elastic and the dissipation properties of the system, on the assumption of a given law of variation of the key motion parameters.

Keywords: *nonlinear oscillation, amplitude, frequency, asymptotic method.*

УДК 681.317.39

Ю.В. Шабатура[1], К.В. Овчинников[2], Ю.В. Бугайов[3]

[1]Академія сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного, Львів
[2]Вінницький національний технічний університет, Вінниця
[3]ТОВ «ІВП ІнноВіннпром», Вінниця

УНІВЕРСАЛЬНИЙ ВИМІРЮВАЛЬНИЙ МОДУЛЬ ДЛЯ ПОБУДОВИ І МОДЕРНІЗАЦІЇ КОНТРОЛЬНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ ВІЙСЬКОВО-ТЕХНІЧНИХ КОМПЛЕКСІВ

Виконана розробка математичного, метрологічного, технічного і алгоритмічного забезпечення для побудови універсального вимірювального модуля, який функціонує на основі використання принципу часового представлення вимірювальної інформації. Проведені дослідження показали придатність розробленого модуля не лише для побудови нових засобів вимірювань але і для модернізації застарілих вимірювальних приладів і систем. Застосування модуля дозволяє суттєво збільшити точність вимірювань і завадостійкість з одночасним зменшенням енергоспоживання.

Ключові слова: *імпульсні тестові сигнали, часове представлення вимірювальної інформації, часо-цифрові перетворювачі, мостова, потенціометрична вимірювальна схема.*

Вступ

Постановка проблеми. Сучасні засоби контрольно-вимірювальної техніки у відповідності з принципами свого функціонування обов’язково передбачають проведення вимірювань значень різних фізичних величин. Як правило процедури вимірювань в таких засобах проводяться з використанням у якості носіїв вимірювальної інформації електричних сигналів, отже за визначенням це є електричні вимірювання. Сьогодні у зв’язку з зростанням складності і відповідальності технічних систем і технологій, які використовуються у військово-технічних комплексах, до засобів електричних вимірювань висуваються дуже жорсткі вимоги, які потребують водночас і суттєвого підвищення точності, і зменшення споживаної потужності, і покращення завадостійкості [1, 2]. У сукупності це приводить до необхідності розробки нових, більш досконалих вимірювальних пристроїв, оскільки існуючі вже неспроможні задовольняти пред’явленим до них вимогам. Отже виникає гостра потреба в розробці універсального вимірювального модуля, який дозволяв би з одного боку створювати на його основі нові вимірювальні засоби, а з іншого боку був би придатний для модернізації застарілих вимірювальних приладів і систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вирішенню задачі підвищення точності вимірювань, зменшення енергоспоживання в вимірювальних каналах і підвищення їх завадостійкості присвячено чимало публікацій [2-4]. Однак, лише в окремих