

В.А. Майданюк

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів**Article history: Received 28 September 2022; Revised 07 October 2022; Accepted 25 October 2022*

АНАЛІЗ ПРОБЛЕМНИХ ПИТАНЬ МАЛОКУТОВОГО НАБЛИЖЕННЯ В МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ПОЛЬОТУ СНАРЯДА

В статті розглянуте актуальне питання розробки математичних моделей польоту снаряда, які з достатньою точністю описують рух снаряда в повітрі. Показано, що характер надання математичних моделей різниться в залежності від необхідного ступеня достовірності відображення математичною моделлю реального фізичного процесу польоту снаряда, адекватному врахуванню тих чи інших сил (моментів), які діють на снаряд, а також від рівня інформації про зовнішні умови польоту, до яких відносяться параметри повітря, в якому відбувається рух снаряда. Водночас застосування коефіцієнта форми – коефіцієнта погодження в системі диференціальних рівнянь призводить до “грубих” математичних моделей, що не дозволяє адекватно описати траєкторію польоту снаряда та окремі її елементи. Особливо рішення цієї проблеми актуально при розробленні та запровадженні процедур, технічних рішень в інтересах досягнення необхідного рівня взаємосумісності з силами НАТО, поступовій відмові від еталонних функцій опору повітря, переході на індивідуальні функції та математичні моделі руху снаряда, які сьогодні прийняті в країнах-членах Альянсу. Проведений аналіз сучасних математичних моделей, показано, що в основу їх побудови покладений наближений підхід, який отримав назву малокутового наближення, в якому для осесиметричного снаряда, що обертається, вважається, що кути нутації достатньо малі, аеродинамічні сили (моменти) залежать тільки від швидкості його польоту і кута нутації та при розрахунках використовують тільки лінійні члени їх розкладання в ряд Тейлора. Розглянута нутаційно-прецесійна поведінка снаряда та розкриті нелінійні залежності коефіцієнтів аеродинамічних сил (моментів) снаряда за кутами нутації.

Ключові слова: снаряд, математична модель, аеродинамічні сили (моменти), рівняння руху, нутації, малокутове наближення, нелінійні залежності

Вступ

Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури. Основу математичних моделей, які характеризують просторовий рух снаряда, складають диференціальні рівняння. Для того, щоб отримати їх рішення в кінцевій формі, повинні бути однозначно задані початкові умови та визначені сили (моменти), що стоять в правих частинах диференціальних рівнянь. При цьому несуттєво, в якій формі задаються впливи, важливо, щоб прийнята модель сил і початкових умов характеризувалася повною інформацією про їх значення на інтервалі, що розглядається [1, 2].

Вважається, що найбільш адекватно просторовий рух снаряда описується математичною моделлю абсолютно твердого тіла, яка вперше була запропонована на початку 20-х років ХХ століття та удосконалюється і сьогодні. Характер надання математичних моделей різниться в залежності від рівня інформації про зовнішні умови польоту і необхідного

ступеня достовірності відображення математичною моделлю реального фізичного процесу польоту снаряда, адекватному врахуванню тих чи інших сил (моментів), які діють на снаряд, та вибраної системи координат (СК) [3, 4].

Кількість сил (моментів), які діють на снаряд в польоті, характер їх змін у процесі руху, а також кількість рівнянь, що описують рух снаряда, залежать від призначення снаряда, конструкційних особливостей та способу стабілізації його у польоті. Математична модель просторового руху снаряда складається з диференціальних рівнянь, які пов'язують основні характеристики руху і конкретні (для даного снаряда) параметри, що входять до рівняння – маса, лінійні розміри, моменти інерції, аеродинамічні сили (моменти) тощо. Найбільш важливою і складною силою, яка використовується для опису просторового руху снаряда в повітрі, є аеродинамічна сила. Від того, наскільки успішно буде вирішена задача забезпечення розрахункового руху снарядів за умови впливу аеродинамічної сили,

залежать як характеристики точності стрільби, так і загальна ефективність артилерійських систем. Якщо інерційно-вагові параметри снаряда визначаються експериментально з достатньою точністю, то вимірювання та визначення аеродинамічних сил (моментів), а також початкових умов стрільби досі є складною проблемою [1, 4].

На сьогодні існуючий підходи до розрахунку траєкторії польоту снаряда, в тому числі і складання Таблиць стрільби на артилерійську систему, можливо охарактеризувати як експериментально-теоретичні, які полягають в тому, що основні дані (елементи траєкторії, поправки, дані Таблиць стрільби) отримуються виходячи з розв'язання диференціальних рівнянь математичної моделі польоту снаряда, водночас для їх уточнення використовують експериментальні дані декількох параметрів, які визначаються на основі балістичних стрільб. Це означає, що для того, щоб розрахункові траєкторії збігалися з фактичними траєкторіями польоту снаряда, для кожного кута кидання та початкової швидкості необхідно вводити так званий балістичний коефіцієнт (коефіцієнт форми), значення якого розглядається як коефіцієнт погодження, що компенсує невідповідність значень аеродинамічних сил (моментів) математичної моделі польоту снаряда і забезпечує збіг елементів розрахункових траєкторій з елементами траєкторій, які отримуються за результатами експериментальних стрільб [1, 4, 5].

Таким чином, застосування коефіцієнта форми – коефіцієнта погодження в системі диференціальних рівнянь призводить до “грубих” математичних моделей, що не дозволяє розрахувати траєкторію польоту снаряда та окремі її елементи з необхідною точністю. Водночас, з появою нових методів рішення кінцево-різницевого схем чисельного розв'язання диференціальних рівнянь, розвитком сучасних зовнішньотраєкторних випробувань, які базуються на рентгенометричних, радіо- і лазеролокаційних методах, появою нового інструментарію в експериментальних дослідженнях в аеродинамічних трубах, розвитком методів чисельного моделювання і значним підвищенням швидкодії обчислювальної техніки від застосування коефіцієнта форми – коефіцієнта погодження поступово відмовляються. В свою чергу це вимагає визначати та представляти аеродинамічні сили (моменти) в математичних моделях польоту снаряда із заданою точністю.

Виходячи з цього **метою статті** є окреслення проблемних питань й тенденцій розвитку математичних моделей польоту снаряда.

Основна частина

1. *Базові математичні моделі просторового руху снаряда.* При балістичних розрахунках снаряд

приймають як абсолютно тверде тіло. З теоретичної механіки відомо, що характеристики руху твердого тіла можуть бути визначені через поступальний рух центра мас (ц.м.) тіла та обертальний рух навколо ц.м.

Просторове положення снаряда як твердого тіла визначається трьома лінійними координатами та трьома кутами. При проведенні розрахунків частіше за все використовуються прямокутні, циліндричні та сферичні СК. В експериментальній балістиці СК для визначення просторового положення снаряда вибираються в залежності від засобів реалізації вимірювань. Як правило, системи диференціальних рівнянь руху снаряда записуються відносно прямокутних прямих СК.

Для вирішення задач розрахунку характеристик руху снаряда використовують дві великі групи прямокутних СК, які відрізняються розташуванням початку системи відліку. До першої групи відносяться СК, що пов'язані з Землею, до другої – пов'язані зі снарядом.

Для будь-якої прямокутної СК $OX_iY_iZ_i$, початок якої збігається з ц.м. снаряда, в загальному вигляді рівняння руху ц.м., без врахування переносних та коріолісових сил інерції, запишуться [1-4]:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{a} F_X / m; \\ W_Z &= \dot{a} F_Y / m; \\ W_Y &= - \dot{a} F_Z / m, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\dot{a} F_i$ – проекція суми сил, діючих на снаряд в польоті; W_Z , W_Y – кутова швидкість обертання снаряда відповідно в площині стрільби та площині горизонту.

Обертальний рух навколо ц.м. снаряда визначається залежністю, що описує зміну головного моменту кількості руху снаряда K внаслідок дії головного вектора зовнішніх моментів M [1-4]

$$\frac{dK}{dt} = \bar{M}. \quad (2)$$

Проекції векторного рівняння (2) на осі координат, що пов'язані зі снарядом, можуть бути представлені через проекції на ці осі вектора моменту кількості руху K

$$\begin{vmatrix} K_X \\ K_Y \\ K_Z \end{vmatrix} = A_i \begin{vmatrix} W_X \\ W_Y \\ W_Z \end{vmatrix},$$

де A_i – тензор інерції снаряда, що виражається матрицею інерції

$$A_i = \begin{vmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{YX} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{ZX} & -I_{ZY} & I_Z \end{vmatrix}.$$

Проекції головного моменту кількості руху снаряда на осі координат $X_i Y_i Z_i$ мають вигляд

$$\begin{aligned} K_{X_i} &= I_{X_i} \omega_{X_i} - I_{X_i Y_i} \omega_{Y_i} - I_{X_i Z_i} \omega_{Z_i}; \\ K_{Y_i} &= I_{Y_i} \omega_{Y_i} - I_{Y_i Z_i} \omega_{Z_i} - I_{Y_i X_i} \omega_{X_i}; \\ K_{Z_i} &= I_{Z_i} \omega_{Z_i} - I_{Z_i X_i} \omega_{X_i} - I_{Z_i Y_i} \omega_{Y_i}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $I_{X_i}, I_{Y_i}, I_{Z_i}$ – моменти інерції снаряда відносно осей $X_i Y_i Z_i$; $I_{X_i Y_i}, I_{X_i Z_i}, I_{Y_i Z_i}$ – відцентрові моменти інерції, що визначаються відносно координатних площин.

Таким чином, з урахуванням (2) та (3) та приймаючи, що снаряд симетричний відносно позаддовжньої осі (для симетричного тіла відцентровий момент інерції $I_{XZ} = I_{YZ} = 0$), рівняння обертального руху снаряда навколо його ц.м. запишуться

$$\begin{aligned} I_{X_i} \dot{\omega}_{X_i} + (I_{Z_i} - I_{Y_i}) \omega_{Y_i} \omega_{Z_i} - I_{X_i Y_i} (\dot{\omega}_{Y_i} - \omega_{X_i} \omega_{Z_i}) &= M_{X_i}; \\ I_{Y_i} \dot{\omega}_{Y_i} + (I_{X_i} - I_{Z_i}) \omega_{X_i} \omega_{Z_i} - I_{X_i Y_i} (\dot{\omega}_{X_i} + \omega_{Y_i} \omega_{Z_i}) &= M_{Y_i}; \\ I_{Z_i} \dot{\omega}_{Z_i} + (I_{Y_i} - I_{X_i}) \omega_{X_i} \omega_{Y_i} + I_{X_i Y_i} (\omega_{Y_i}^2 - \omega_{X_i}^2) &= M_{Z_i}. \end{aligned} \quad (4)$$

Праві частини рівнянь (4) містять проекції моментів відносно ц.м. усіх сил, що діють на снаряд, на відповідні осі координат. Моменти кориолісових сил при розв'язанні багатьох практичних балістичних задач з огляду на їх малість не враховуються.

Обертальний рух навколо ц.м. розглядають також й у випадку, коли складають рівняння руху в узагальнених координатах. Якщо положення снаряда визначається незалежними узагальненими координатами q_1, q_2, \dots, q_i , тоді рівняння руху можуть бути записані у формі рівнянь Лагранжа другого роду [1, 5, 6]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^j, \quad (5)$$

де T – кінетична енергія обертального руху снаряда; q_i – узагальнені координати, які застосовуються для опису кутового положення снаряда в просторі; Q_i^j – узагальнені сили, які діють на снаряд; $i = \overline{1, n}$ – кількість узагальнених сил, які діють на снаряд; $j = \overline{1, k}$ – кількість ступенів свободи обертального руху снаряда (узагальнених координат).

Обертальний рух снаряда характеризується трьома ступенями свободи, тобто для однозначного визначення положення снаряда відносно ц.м. необхідно мати три узагальнені координати.

Отримані рівняння (1, 4, 5) є вихідними базовими рівняннями математичної моделі руху польоту снаряда. На різних етапах дослідження снаряда математична модель формується залежно від урахування параметрів, які впливають на його поведінку. Дослідник складає моделі, спочатку прості, потім

більш складні так, щоб у підсумку побудувати прийнятну модель, яка відповідає поставленому завданню дослідження.

Рух снаряда можна описати однією з трьох математичних моделей, які відрізняються одна від одної в основному рівнем складності і відповідно рівнем адекватності реальному процесу руху снаряда в повітрі [1, 2, 4], а саме:

модель матеріальної точки;
модифікована модель матеріальної точки;
модель руху твердого тіла з шістьма ступенями свободи (6DOF).

Модель матеріальної точки. В найпростішій моделі з трьома ступенями свободи снаряд розглядається як матеріальна точка, яка рухається в атмосфері під дією сили тяжіння і аеродинамічної сили, що має напрямок протилежний напрямку руху снаряда.

Перетворення координат з одної системи в іншу відбувається шляхом перемноження векторів на матриці переходів в залежності від кутів між осями систем координат.

У моделі матеріальної точки опис руху снаряда відбувається за трьома ступенями свободи – координатами руху, та передбачається, що снаряд ідеально стабілізується на траєкторії польоту, тобто позаддовжня вісь снаряда завжди збігається з напрямком швидкості польоту снаряда. Модель матеріальної точки описує рух, який є плоским та не відображає нутаційно-прецесійну поведінку, що викликана гіроскопічними властивостями снаряда.

Модифікована модель матеріальної точки. Модифікована модель матеріальної точки – це модель з чотирма ступенями свободи, з них три визначають координати руху снаряда, четвертий – кутове положення снаряда за кутом нутації.

У рівняннях модифікована моделі матеріальної точки на снаряд, що рухається в повітрі, додатково враховуються сили, які викликані обертальним рухом, а також нутаційними коливаннями снаряда.

Модель руху твердого тіла з шістьма ступенями свободи (6DOF). Модель руху твердого тіла з шістьма ступенями свободи (6-DOF) є результатом порівняно недавнього прогресу в галузі сучасної балістики. На сьогодні найбільш потужні і швидкі комп'ютери можуть отримувати рішення для 6-DOF траєкторії руху снаряда в мілісекунди, такі обчислення зазвичай проводяться у великих балістичних дослідницьких і конструкторських лабораторіях.

Сучасні векторні 6-DOF диференціальні рівняння руху побудовані та сформовані так, щоб знайти рішення руху снаряда з урахуванням нутаційно-прецесійного руху з точки зору напрямних косинусів осей симетрії снаряда, на відміну від прийнятого підходу, побудованого на методі кутів Ейлера.

Однією з переваг напрямних косинусів полягає в тому, що для польоту снаряда з великими кутами нутації не вимагається додаткова система координат; метод напрямних косинусів справедливий на всіх кутах нутації.

Сучасне чисельне інтегрування диференціальних рівнянь 6-DOF руху дає найбільш точне розв'язання для траєкторії польоту та динамічної поведінки обертально-симетричного снаряда за умов, що всі аеродинамічні сили (моменти), а також початкові умови відомі з високим ступенем точності.

Теоретичною основою для рішення проблеми знаходження аеродинамічних сил (моментів) могли би бути методи теоретичної аеродинаміки, однак до сьогодні ні аналітичні, ні чисельні методи не дозволяють з прийнятною точністю дати відповідь на це актуальне питання. З точки зору інших підходів і експериментальних і теоретичних, основною складністю проблематики є залежність аеродинамічних сил (моментів) від великої кількості факторів і, що найсуттєвіше, їх нетривіальна залежність від залежних змінних: швидкостей руху ц.м. і кутів нутації, які визначають загальний рух снаряда.

В основу сучасних розрахунків покладений наближений підхід до побудови математичної моделі, який отримав назву малокутового наближення, в якому для осесиметричного снаряда, що обертається, вважається, що:

кути нутації достатньо малі;

аеродинамічні сили (моменти) залежать тільки від швидкості його польоту і кута нутації та при розрахунках використовують тільки лінійні члени їх розкладання в ряд Тейлора.

2. *Нутаційно-прецесійна поведінка снаряда та його малокутове наближення.* При русі снаряда по каналу ствола гармати ц.м. снаряда не збігається з віссю каналу ствола внаслідок похибок виготовлення та зазорів між стінками ствола і центрувальним потовщенням (рис. 1) [1-4].

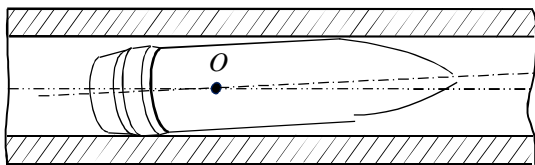


Рис. 1. Рух снаряда в каналі ствола гармати

При високих кутових швидкостях внаслідок такого збігу виникають значні центробіжні зусилля, які призводять до появи різних початкових кутів нутації та кутових швидкостей нутаційних коливань. Важливо зауважити, що такі чинники, як зношення каналу ствола і розігрів ствола, під час стрільби призводять до значного відхилення швидкості польоту

снаряда від її розрахункового значення через зміну величини кута нутації на траєкторії польоту снаряда. Процес зношення каналу ствола є дуже складним і залежить від багатьох факторів, які впливають на його поверхню. Вплив розігріву ствола на ефективність стрільби важко враховувати, оскільки він змінюється від пострілу до пострілу, і існуючі правила стрільби і управління вогнем артилерії [7] не дають рекомендацій з обліку розігріву ствола гармат при інтенсивній стрільбі.

Характер і параметри нутаційних коливань та їх вплив на політ снарядів за умови однаковості інших умов визначаються рівнем початкових збурень:

початкових кутів нутаційних коливань d_0 ;

початкових кутових швидкостей нутаційних коливань $\dot{\Theta}_0$.

У роботах [1, 5] представлені диференціальні рівняння обертального руху снаряда, що рухається по плоскій траєкторії (в площині стрільби) за умов дії тільки перекидального моменту, які для подальшого їх дослідження приведені до неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$\ddot{Z} - 2i\dot{A}\dot{Z} - M_a Z = 2i\dot{A}\dot{\Theta} - \ddot{\Theta}. \quad (6)$$

де $Z = d_2 + id_1$ – комплексна змінна; d_1, d_2 – відповідно, вертикальна і горизонтальна складові кута нутації снаряда; M_a – перекидальний момент; \dot{A} – кутова швидкість прецесійного руху; $H(y)$ – функція зміни густини повітря за висотою.

Повний інтеграл рівняння (6) надається у вигляді суми загального інтегралу відповідного однорідного рівняння (без правої частини), яке описує вільний рух осі снаряда, що залежить від початкових умов польоту снаряда і характеру зміни перекидального моменту та часткового інтегралу неоднорідного рівняння, яке описує вимушений рух осі снаряда внаслідок кривизни траєкторії (зміни кута кидання Θ).

Вирішуючи загальний інтеграл однорідного рівняння, за умов, що в початковий момент часу $t = 0$

$$d_1 = d_{10}; d_2 = d_{20}; \dot{\Theta}_1 = \dot{\Theta}_{10}; \dot{\Theta}_2 = \dot{\Theta}_{20},$$

отримані складові кута нутації

$$\begin{aligned} d_{10} &= r_1 \sin(\omega_1 t + j_1) + r_2 \sin(\omega_2 t + j_2); \\ d_{20} &= r_1 \cos(\omega_1 t + j_1) + r_2 \cos(\omega_2 t + j_2), \end{aligned} \quad (7)$$

та складові кутової швидкості нутації

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_{10} &= r_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + j_1) + r_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + j_2); \\ -\dot{\Theta}_{20} &= r_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + j_1) + r_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + j_2). \end{aligned} \quad (8)$$

На рис. 2 наведено графік руху повздовжньої осі снаряда в координатах d_1, d_2 .

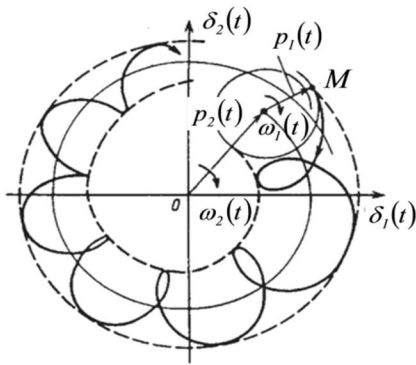


Рис. 2. Нутаційний рух снаряда на прямолінійній ділянці траєкторії за умов $\delta_0 \neq 0, \dot{\delta}_0 \neq 0$

Головним припущенням при розв'язанні системи диференціальних рівнянь руху снаряда є те, що сферичний трикутник зі сторонами d_1, d_2, d (рис. 3) приймається за плоский і вважається

$$\begin{aligned} d_1 &= d \sin n; \\ d_2 &= d \cos n, \end{aligned} \tag{9}$$

де n – кут прецесії снаряда.

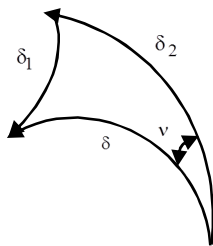


Рис. 3. Складові кута нутації снаряда

Стрільба у реальних умовах з гармат із середньою або значною виробкою, а також при значному розігріві каналу ствола гармати супроводжуватиметься значними початковими збуреннями, які призведуть до збільшення кутів нутації на траєкторії, що істотно впливає на швидкість польоту снаряда і, відповідно, на похибки в дальності стрільби через зміну величини аеродинамічної сили, що відтак призводить до похибок, граничні значення яких становлять $1,5 \div 2 \%$ дальності стрільби, що не відповідає вимогам точності повної підготовки [8, 9].

3. *Нелінійні залежності аеродинамічних сил (моментів) снаряда за кутами нутації.* В загальному випадку вектор аеродинамічної сили має дотичну та нормальну складові, що діють на поверхню снаряда, тобто складові за напрямом дотичної та нормалі до траєкторії в площині, яка проходить через дотичну до траєкторії та віссю снаряда та мають назву *Drag Force* (F_D) – “сила лобового опору” та “піднімальна сила” – *Lift Force* (F_L) снаряда [2, 4, 10].

Сила лобового опору завжди спрямована протилежно швидкості незалежно від напрямку, в якому рухається снаряд (рис. 4).

Векторний опис сили лобового опору визначається як [2, 4]

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2} \rho S C_D \vec{V} V = -\frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \vec{i}, \tag{10}$$

а скалярна величина сили дорівнює

$$F_D = -\frac{1}{2} \rho V^2 S C_D, \tag{11}$$

де ρ – щільність повітря; \vec{V} – вектор швидкості снаряда; V – скалярна величина вектора швидкості снаряда; $\vec{i} = \frac{\vec{V}}{V}$ – одиничний вектор у напрямку вектора швидкості \vec{V} ; S – площа поперечного перетину снаряда; C_D – коефіцієнт лобового опору.

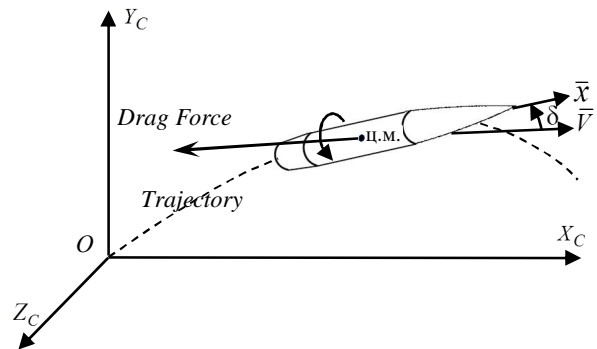


Рис. 4. Сила лобового опору

$OX_C Y_C Z_C$ – система координат пов'язана із Землею

Піднімальна (нормальна) сила діє в площині, яка є нормальною до вектора швидкості руху снаряда (рис. 5).

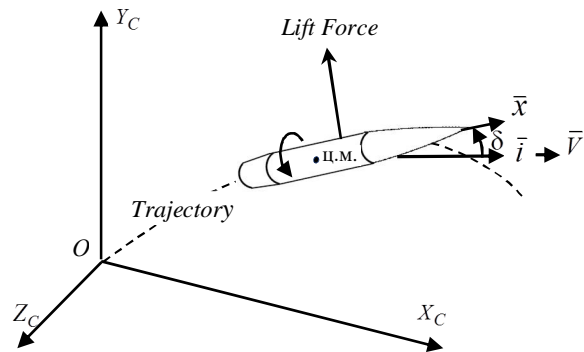


Рис. 5. Піднімальна сила

Піднімальна сила виражається у векторній та скалярній формах [2, 4]:

$$\vec{F}_L = \frac{1}{2} \rho S C_{L_a} [\vec{V}' \cdot (\vec{x}' \cdot \vec{V})] = \frac{1}{2} \rho S C_{L_a} V^2 [\vec{i}' \cdot (\vec{x}' \cdot \vec{i})]; \tag{12}$$

$$F_L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{L_a} d, \tag{13}$$

де C_{L_a} – коефіцієнт піднімальної сили.

Розкладаючи аеродинамічні сили (моменти) в ряд Тейлора за кутами нутації і утримуючи лише невелике число членів розкладу, отримують набір параметрів (аеродинамічних коефіцієнтів), в цьому випадку проблема залежностей сил (моментів), які виражені через аеродинамічні коефіцієнти, значно спрощується, оскільки залишається визначити залежність аеродинамічних коефіцієнтів (коефіцієнтів Тейлорівського розкладання) лише від швидкості тим чи іншим практичним шляхом.

Запишемо значення сили опору повітря F_D та підймальна сила F_L та приймемо, що кут d малий, у цьому випадку можна рахувати $\sin d = d$ і, відповідно, кути d_1 і d_2 того ж порядку малості. Розкладемо F_D , F_L в ряди за степенями кута d навколо значення $d \gg 0$. Так як F_D – функція парна, тобто при зміні кута d не змінюється, а F_L , змінює свій знак, то F_D буде розкладатися за парними, а F_L – за непарними степенями кута d

$$\begin{aligned} F_D &= (F_D)_{d \gg 0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_D}{\partial d^2} \times d^2 + \dots; \\ F_L &= \frac{\partial F_L}{\partial d} \times d + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F_L}{\partial d^3} \times d^3 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Нехтуючи членами розкладання, які включають кут d у другому і вищих степенях точності,

$$\begin{aligned} F_D &= (F_D)_{d \gg 0}; \\ F_L &= \frac{\partial F_L}{\partial d} \times d. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогічно постає питання з аеродинамічними моментами снаряда, так, перекидальний момент – *Overturning Moment* (M_a) залежить від кута нутації снаряда d (рис. 6).

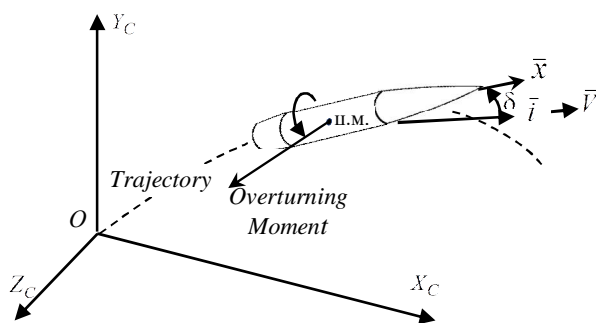


Рис. 6. Перекидальний момент

Перекидальний момент задається векторним і скалярним рівняннями [2, 4]:

$$\vec{M}_a = \frac{1}{2} \rho S d C_{M_a} V^2 (\vec{i} \cdot \vec{x}); \quad (16)$$

$$M_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S d C_{M_a} d, \quad (17)$$

де C_{M_a} – коефіцієнт перекидального моменту.

Як і раніше, для сили опору повітря та підйимальної сили, запишемо значення перекидального моменту M_a та приймемо, що кут нутації снаряда d малий. Розкладемо M_a в ряд за степенями кута d навколо значення $d \gg 0$. Так як M_a є функція парна, тобто при зміні кута d величина M_a не змінює свій знак, відповідно буде розкладатися за парними степенями кута d

$$M_a = \frac{\partial^2 M_a}{\partial d^2} \times d + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 M_a}{\partial d^4} \times d^3 + \dots, \quad (18)$$

нехтуючи членами розкладання другого та вищих порядків, отримуємо

$$M_a = \frac{\partial^2 M_a}{\partial d^2} \times d. \quad (19)$$

Отже, розкладання аеродинамічні сили (моменти) в ряд Тейлора за кутами нутації і утримання лише лінійних членів розкладу, дозволяє суттєво спростити математичні моделі та їх розрахунки, оскільки залишається визначити залежність аеродинамічних сил (моментів) (коефіцієнтів Тейлорівського розкладання) лише від швидкості польоту снаряда. Водночас це призводить до значного погіршення точності подання аеродинамічних сил (моментів) та не гарантує забезпечення потрібної точності розрахунку траєкторій польоту снаряда.

Як правило, нелінійна залежність аеродинамічних сил (моментів) виражається через їх коефіцієнти. Так, коефіцієнт лобового опору варіюється в залежності від величини кута нутації снаряда та добре апроксимується виразом

$$C_D = C_{D0} + C_{D a^2} d^2, \quad (20)$$

C_{D0} – лінійний коефіцієнт лобового опору; $C_{D a^2}$ – квадратичний коефіцієнт лобового опору.

Коефіцієнти підйимальної сили та перекидального моменту також характеризуються нелінійною поведінкою та суттєво залежать від величини кута нутації снаряда

$$\begin{aligned} C_{L_a} &= C_{L_{a0}} + C_{L_{a3}} d^3; \\ C_{M_a} &= C_{M_{a0}} + C_{M_{a3}} d^3, \end{aligned} \quad (21)$$

де $C_{L_{a0}}$, $C_{L_{a3}}$ – відповідно лінійний та кубічний коефіцієнти підйимальної сили; $C_{M_{a0}}$, $C_{M_{a3}}$ – відповідно лінійний та кубічний коефіцієнти.

Таким чином, введення додаткового члена розкладання складових коефіцієнтів сил (моментів) в ряд

Тейлора за кутами нутації (20, 21) та врахування їх в правих частинах диференціальних рівнянь руху снаряда дає можливість підвищити наближення математичної моделі до реального опису польоту снаряда в повітрі та значно підвищити точність розрахунку траєкторій польоту снаряда.

Висновки

На сьогодні при розрахунках траєкторій польоту снарядів актуальним питанням є розробка математичних моделей польоту снаряда, які з достатньою точністю описують рух снаряда в повітрі. Характер надання математичних моделей різниться в залежності від необхідного ступеня достовірності відображення математичною моделлю реального фізичного процесу польоту снаряда, адекватному врахуванню тих чи інших сил (моментів), які діють на снаряд, а також від рівня інформації про зовнішні умови польоту, до яких відносяться параметри повітря, в якому відбувається рух снаряда. Проведений аналіз сучасних математичних моделей показує, що в основу їх побудови покладений наближений підхід, який отримав назву малокутового наближення, в якому для осесиметричного снаряда, що обертається, вважається, що кути нутації достатньо малі, аеродинамічні сили (моменти) залежать тільки від швидкості його польоту і кута нутації та при розрахунках використовують тільки лінійні члени їх розкладання в ряд Тейлора. Розглянута нутаційно-прецесійна поведінка снаряда та розкриті нелінійні залежності коефіцієнтів аеродинамічних сил (моментів) снаряда за кутами нутації. Перспективним напрямом досліджень є побудова математичних 6DOF - моделей польоту гіроскопічно-стабілізованого снаряда з врахування нелінійної залежності аеродинамічних коефіцієнтів за кутом нутації.

Список літератури

1. Дмитриевский А. А., Лисенко Л. Н. Внешняя баллистика. Москва : *Машиностроение*, 2005. 607 с.
2. Carlucci D. E., Jacobson S. S. Ballistics, theory and design of guns and ammunition : book. London, New York : Taylor & Francis Group, 2007. 514 p.
3. Баллистика / С. В. Беневольский и др.; за ред. Л. Н. Лисенко. Пенза : ПАИИ, 2005. 510 с.
4. McCoy R. L. Modern Exterior Ballistics. Atglen, PA. : Schiffer Military History, 2012. 328 p.
5. Степанов В. П. Внешняя баллистика. Ч. II. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2011. 542 с.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике: для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. Москва : Наука, 1981. 706 с.
7. Правила стрільби і управління вогнем артилерії (дивізіон, батарея, взвод, гармата): затв. наказом

Генерального штабу ЗС України від 05.01.2018. Київ: ГШ ЗС України, 2018. 268 с.

8. Макеев В. І., Грабчак В. І., Прокопенко В. В., Кучерявенко І. Ю. Дослідження впливу нутаційних коливань снарядів (мін) на дальність їх польоту. *Військово-технічний збірник*. Львів, 2010. Вип. 3. С. 59–64.

DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.3.2010.59-64>

9. Грабчак В. І. Вплив початкових умов збуреного руху снаряда на величину його кута нутації. *Військово-технічний збірник*. Львів, 2013. Вип. 1 (8). С. 11–16.

DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.8.2013.11-16>

10. Baranowski L. Effect of the mathematical model and integration step on the accuracy of the results of computation of artillery projectile flight parameters. *Bulletin of the Polish Academy of sciences technical sciences*. 2013. Vol. 61, No. 2, pp. 475–484. DOI: [10.2478/bpasts-2013-0047](https://doi.org/10.2478/bpasts-2013-0047)

References

1. Dmitriyevskiy A. A. and Lisenko L. N. (2005), "Vneshnyaya ballistika" [External ballistics]: Moskva: Mashinostroyeniye, 607 p. [in Russian].
2. Carlucci D. E., Jacobson S. S. Ballistics, theory and design of guns and ammunition : book. London, New York : Taylor & Francis Group, 2007. 514 p.
3. Benevol'skiy S. V. i dr.; za red. Lisenko L. N. (2005), "Ballistika" [Ballistics]: Penza: PAII, 510 p. [in Russian].
4. McCoy R. L. Modern Exterior Ballistics. Atglen, PA. : Schiffer Military History, 2012. 328 p.
5. Stepanov V. P. (2011), "Vneshnyaya ballistika" CH.II [External ballistics]: Tomsk : Izd-vo Tom. un-ta, 542 p. [in Russian].
6. Bronshteyn I. N. and Semendiyayev K. A. (1981), "Spravochnik po matematike: dlya inzhenerov i uchashchikhsya VTUZOV" [Reference book on mathematics: for engineers and students of VTUZOV]: Moskva : Nauka, 706 p. [in Russian].
7. "Pravyly stril'by i upravlinnya vohnem artyleriyi (dyvizion, batareya, vzvod, harmata)" (2018) [Rules of firing and fire control of artillery (division, battery, platoon, gun)]: zatv. nakazom Heneral'noho shtabu ZS Ukrayiny vid 05.01.2018. Kyiv : HSH ZS Ukrayiny, 268 p. [in Ukrainian].
8. Makyeyev V. I., Hrabchak V. I., Prokopenko V. V. and Kucheryavenko I. Yu. (2010), "Doslidzhennya vplyvu nutatsiynykh kolyvan' snaryadiv (min) na dal'nist' yikh pol'otu" [Study of the effect of nutational oscillations of projectiles (min) on their flight range]: *Military Technical Collection*. Lviv, 2010. Issue № 3. pp. 59–64. DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.3.2010.59-64> [in Ukrainian].
9. Hrabchak V. I. (2013), "Vplyv pochatkovykh umov zburonoho rukhu snaryada na velychynu yoho kuta nutatsiyi" [The influence of the initial conditions of the disturbed motion of the projectile on the value of its nutation angle]: *Military Technical Collection*. Lviv, 2013. Issue № 1 (8). pp.11–16. DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.8.2013.11-16> [in Ukrainian].
10. Baranowski L. Effect of the mathematical model and integration step on the accuracy of the results of computation of artillery projectile flight parameters. *Bulletin of the Polish Academy of sciences technical sciences*. 2013. Vol. 61, No. 2, pp. 475–484. DOI: [10.2478/bpasts-2013-0047](https://doi.org/10.2478/bpasts-2013-0047)

ANALYSIS OF PROBLEMS OF SMALL-ANGLE APPROXIMATION IN MATHEMATICAL MODELS OF PROJECTILE FLIGHT

V. Maidaniuk

The article deals with the topical issue of developing mathematical models of projectile flight, which accurately describe the projectile motion in the air. It is shown that the nature of the mathematical models presentation varies depending on the required reliability degree of the real physical projectile flight process representation by the mathematical model, the adequate consideration of certain forces (moments) acting on the projectile, as well as the level of information about the external flight conditions which include the parameters of the air in which the projectile moves. At the same time, the use of the shape coefficient - the agreement coefficient in the differential equation system leads to "rough" mathematical models, which does not allow to adequately describe the projectile flight trajectory and its individual elements. The solution to this problem is especially relevant during developing and implementing procedures, technical solutions in the interest of achieving the necessary level of interoperability with NATO forces, the gradual abandonment of the standard functions of air resistance, the transition to individual functions and mathematical models of projectile motion, which are currently accepted in the member states of the Alliance. The conducted analysis of modern mathematical models showed that their construction is based on an approximate approach, which was called the small-angle approximation, in which, for an axisymmetric rotating projectile, it is considered that the nutation angles are sufficiently small, the aerodynamic forces (moments) depend only on the speed of its flight and the nutation angle, and only the linear terms of their Taylor series expansion are used in the calculations. The nutation-precessional behavior of the projectile was considered and the nonlinear dependencies of the coefficients of the aerodynamic forces (moments) of the projectile on the angles of nutation were revealed.

Keywords: projectile, mathematical model, aerodynamic forces (moments), motion equations, nutation, small-angle approximation, nonlinear dependencies

УДК: 623.454.71

DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.27.2022.26-35>

І. Мартинюк, Є. Шматов, О. Стаднічук, Т. Погребняк, В. Ларіонов, І. Гоменюк

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного**Article history:* Received 23 September 2022; Revised 12 October 2022; Accepted 25 October 2022

РОБОТИЗОВАНІ ВОГНЕМЕТНІ КОМПЛЕКСИ ЯК ПЕРСПЕКТИВА РОЗВИТКУ ВОГНЕМЕТНИХ ПІДРОЗДІЛІВ

Війна в Україні і, як наслідок, зростання міжнародної напруженості стало головним питанням національної безпеки та необхідності визначення ефективних перспективних засобів озброєння. В умовах, коли противник значно переважає за всіма компонентами (технічно та кількісно), безпілотні (роботизовані, дистанційно керовані) потужні вогневі засоби спроможні вплинути на хід бойових дій. Війна в Нагорному Карабасі (2020 р.) та Україні (2014-2022 рр.) показала високу ефективність засобів ураження, що розміщуються на безпілотних (роботизованих) платформах. Розробка та прийняття нових систем озброєння та військової техніки, високоточних засобів розвідки та ураження, автоматизованих систем управління зумовить перегляд та реформування організаційно-штатної структури військ, своєчасність та ефективність виконання бойових завдань, максимальне збереження особового складу тощо. Одним з таких засобів вогневого ураження може бути роботизований вогнеметний комплекс. Перспективність використання роботизованих систем є достатньо актуальними та затребуваними в умовах сьогодення. Мета дослідження – вивчення перспективності використання роботизованого вогнеметного комплексу, визначення його основних характеристик, ролі та місця в організаційно-штатній структурі вогнеметного взводу роти радіаційного, хімічного, біологічного захисту. У роботі проаналізовано типову організаційно-штатну структуру вогнеметного взводу та його бойові можливості. Запропоновано тактико-технічні характеристики для розроблення нового роботизованого вогнеметного комплексу та розроблено нову типову організаційно-штатну структуру вогнеметного взводу, на озброєнні якого він буде прийнятий. Розраховано ефективність (ймовірність) ураження цілі пропонованим зразком озброєння. На основі аналізу отриманих результатів сформульовано основні переваги вогнеметного взводу, що буде озброєний роботизованим вогнеметним комплексом. Зокрема, автономність виконання завдання, висока точність ураження, мобільність і живучість, збільшена дальність ураження та потужність вогнеметних пострілів, спроможність виконувати завдання за будь-якої погоди та в будь-який час доби та відсутність психологічного фактора. Упровадження роботизованого вогнеметного комплексу в штат роти радіаційного, хімічного, біологічного захисту допоможе скоротити чисельність особового складу, що перебуватиме на полі бою.

Ключові слова: автономна система озброєння, вогнеметний взвод, роботизований вогнеметний комплекс, ефективність ураження, бойові можливості