

## РОЗРОБЛЕННЯ ТА МОДЕРНІЗАЦІЯ ОВТ

УДК 623.546

DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.29.2023.3-10>

Р.В. Бубенщиков

<sup>1</sup>Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

Article history: Received 28 September 2023; Revised 28 September 2023; Accepted 30 September 2023

### ЯВНА ФОРМА МОДИФІКОВАНОЇ МОДЕЛІ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ У СФЕРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Рух снаряда можна описати однією з трьох математичних моделей, які відрізняються одна від одної в основному рівнем складності і відповідно рівнем адекватності реальному процесу руху снаряда в повітрі. Основу математичних моделей, які характеризують просторовий рух снаряда, складають диференціальні рівняння. Представлена модифікована модель матеріальної точки як математична модель польоту снаряда, що рухається в повітрі; в якості складових головного вектора діючих сил враховано складові повної аеродинамічної сили – силу лобового опору та підймальну силу, силу Магнуса. В диференціальних рівняннях модифікованої моделі матеріальної точки додатково враховується обертальний рух снаряда навколо його осі симетрії, а також нутаційні коливання снаряда. Показано, що практичне застосування модифікованої моделі матеріальної точки обмежується наявністю неявного звичайного диференціального рівняння. Так, кут нутації, в модифікованій моделі матеріальної точки, залежить від прискорення польоту снаряда, що приводить до диференційного рівняння, що визначається неявною функцією. Неявне диференційне рівняння визначає похідну як неявну функцію, тобто рівняння не розв'язане відносно похідної. Це робить модифіковану модель матеріальної точки такою, що складно розв'язується. В статті розкриті процедури перетворення системи диференціальних рівнянь модифікованої моделі матеріальної точки до явного вигляду, що дозволяє розв'язати їх на основі стандартних чисельних методів. Отримана замкнута система диференціальних рівнянь за траєкторними параметрами польоту снаряда, а також система алгебраїчних рівнянь для кутів нутації снаряда, які представлені в сферичних системах координат.

**Ключові слова:** математична модель, модифікована модель, кут нутації, аеродинамічні сили (моменти), снаряд, диференціальні рівняння, сферичні координати, неявна функція

#### Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури

Перспективним напрямом підвищення точності та оперативності визначення установок для стрільби артилерійських систем є розробка балістичних обчислювачів, які реалізують процедури їх визначення за допомогою рішення (інтегрування) системи диференціальних рівнянь (математичної моделі), які описують рух снаряда в просторі, при заданих початкових умовах стрільби на ЕОМ [1, 2]. Рух снарядів, як правило, описується з використанням однієї з трьох математичних моделей, які різняться кількістю залежних змінних, прийнятими спрощеннями процесу польоту, в тому числі впливом на політ снаряда аеродинамічних сил (моментів) [1-4]:

математична модель матеріальної точки;

математична модель твердого тіла з шістьма ступенями свободи (6DoF – Six degrees of freedom);

модифікована математична модель матеріальної точки (МММТ).

Для того, щоб отримати їх рішення в кінцевій формі, повинні бути однозначно задані початкові умови та визначені сили (моменти), які стоять в правих частинах диференціальних рівнянь. При цьому не суттєво, в якій формі задаються впливи, важливо, щоб прийнята модель сил та початкових умов характеризувалася повною інформацією про їх значення на інтервалі, що розглядається [3, 5].

На сьогодні всі існуючі математичні моделі є напівемпіричні. Так, для погодження математичних моделей снаряда з реальним фізичним процесом його польоту, а саме врахування дії аеродинамічної сили на

снаряд, використовують значення коефіцієнта форми снаряда, який отримується на основі експериментальних стрільб, та розглядається як коефіцієнт погодження, що отриманий за визначених умов, які компенсують усі невідповідності системи припущень розрахункового методу і забезпечують збіг елементів розрахункових траєкторій з елементами траєкторій, які отримуються за результатами експериментальних стрільб. Застосування коефіцієнта форми в системі диференціальних рівнянь польоту снаряда призводить до “грубих” математичних моделей, що не дозволяє отримати ті чи інші параметри руху снаряда з необхідною точністю та унеможливує вирішення багатьох конкретних теоретичних і практичних обернених задач зовнішньої балістики, в тому числі застосування їх у балістичних обчислювачів, побудованих на інтегральних алгоритмах [2, 4]. Відтак, постає актуальне завдання, яке полягає у відмові від коефіцієнта форми – коефіцієнта погодження в математичних моделях польоту та визначення аеродинамічних сил (моментів) з заданою точністю.

Найбільш повно процес польоту снаряда відображає 6DoF-модель, що розглядає снаряд як фізичний об’єкт з шістьма степенями свободи, осьовою симетрією та ненульовими моментами інерції. Ця модель дозволяє врахувати більшість фізичних процесів, що відбуваються при русі снаряда в повітряному середовищі. Водночас, 6DoF-модель доволі громіздка та вимагає в якості вихідних даних велику кількість різних параметрів (12 диференціальних рівнянь включають в себе 13 різних коефіцієнтів аеродинамічних сил (моментів)). МММТ має 4 степені свободи – три координати центру мас та кут обертання снаряда навколо його осі симетрії, містить 6 коефіцієнтів сил (моментів), що найбільш сильно впливають на політ снаряда. Виходячи з цього, процедури визначення коефіцієнтів аеродинамічних сил (моментів) на основі МММТ найменш складні в порівнянні з моделлю 6DoF через меншу кількість коефіцієнтів та диференціальних рівнянь, що входять до її складу.

Практичне застосування МММТ обмежується наявністю неявного звичайного диференціального рівняння (ЗДР). Неявне ЗДР визначає похідну як неявну функцію, тобто рівняння не розв’язане відносно похідної [4-6]. Це робить МММТ такою, що складно розв’язується [5-7].

Для дослідження руху снаряда та визначення параметрів його траєкторії використовують різні системи координат. У загальному випадку вибір системи координат визначається декількома факторами, основними з яких є область руху снаряда, а також потрібна точність розрахунку елементів траєкторії польоту снаряда та можливості обчислювальних засобів. Під

час проведення розрахунків польоту, залежно від того, яким методом вирішується поставлене завдання, можуть бути застосовані прямокутні та сферичні системи координат [1, 2, 4].

**Метою статті** є представлення системи диференціальних рівнянь МММТ у явному вигляді в сферичній системі координат, що дозволяє розв’язати їх на основі стандартних чисельних методів.

## Основна частина

### 1. Модифікована модель матеріальної точки.

В загальному вигляді МММТ система містить наступні диференціальні рівняння [1, 3, 4]:

- рівняння руху центру мас снаряда

$$m\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{DF} + \mathbf{LF} + \mathbf{MF} + m\mathbf{g} + m\mathbf{\Lambda}; \quad (1)$$

- рівняння обертання снаряда навколо осі симетрії

$$I_x \dot{p} = \mathbf{SDM}, \quad (2)$$

де  $m$  – маса снаряда;  $\mathbf{u}$  – вектор швидкості польоту снаряда відносно земної системи відліку;  $\mathbf{DF}$  – сила лобового опору (Drag Force);  $\mathbf{LF}$  – піднімальна (нормальна) сила (Lift Force);  $\mathbf{MF}$  – сила Магнуса (Magnus Force);  $\mathbf{g}$  – прискорення сили тяжіння;  $\mathbf{\Lambda}$  – прискорення від сили Кориоліса, що обумовлене обертанням Землі;  $p$  – кутова швидкість обертання снаряда (швидкість власного обертання);  $\mathbf{SDM}$  – момент гасіння швидкості обертання снаряда (Spin Damping Moment);  $I_x$  – полярний момент інерції снаряда відносно осі його обертання.

Тут і далі по тексту статті приймемо назви складових аеродинамічної сили (моментів) відповідно до STANAG 4355 (Edition 3) [3], а також для позначки векторів будемо використовувати напівжирні букви, відповідно для скалярів – стандартні букви.

Сила лобового опору, піднімальна сила та сила Магнуса виражаються у векторній формі [1, 3, 4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{DF} &= -\frac{1}{8} \pi \rho d^2 i C_D \mathbf{v}; \\ \mathbf{LF} &= \frac{1}{8} \pi \rho d^2 C_L v^2 \mathbf{\alpha}_t; \\ \mathbf{MF} &= \frac{1}{8} \pi \rho d^3 p C_{mag-f} (\mathbf{\alpha}_t \times \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\rho$  – густина повітря;  $d$  – діаметр (калібр) снаряда;  $i$  – коефіцієнт форми (коефіцієнт погодження);  $C_D$  – коефіцієнт сили лобового опору;  $C_L$  – коефіцієнт піднімальної сили;  $C_{mag-f}$  – коефіцієнт сили Магнуса;  $\mathbf{\alpha}_t$  – кут нутації;  $\mathbf{v}$  – вектор швидкості снаряда відносно повітря, визначається компонентами:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [v_1, v_2, v_3]; \\ v &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 1 схематично показаний напрямок дії сили лобового опору, піднімальної сили та сили Магнуса на снаряд.

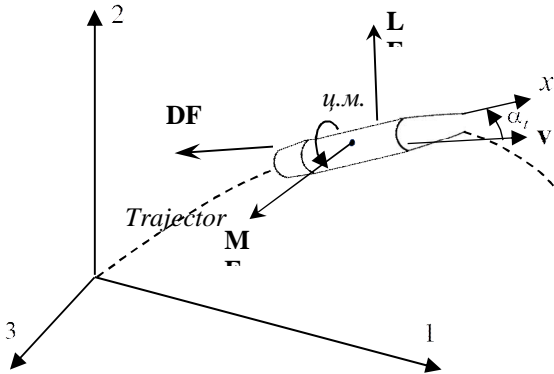


Рис. 1. Сили лобового опору, піднімальна сила та Магнуса

Момент гасіння швидкості обертання створює від'ємне кутове прискорення обертання снаряда навколо його осі та протидіє обертанню снаряда [1, 3]

$$\mathbf{SDM} = \frac{1}{8I_x} \pi \rho d^4 C_{spin} v (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}, \quad (5)$$

де  $C_{spin}$  – коефіцієнт гасіння швидкості обертання снаряда;  $\mathbf{H}$  – вектор кінетичного моменту снаряда.

На рис. 2 показано від'ємний напрямок моменту гасіння, який призводить до зменшення величини швидкості обертання снаряда.

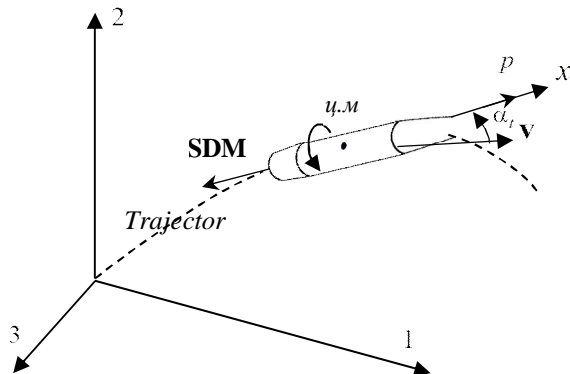


Рис.2. Момент гасіння швидкості обертання снаряда

У векторній формі рівняння кута нутації снаряда, що входить до виразів аеродинамічних сил, визначається як [1, 3]

$$\alpha_t = - \frac{8I_x p (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{u}})}{\pi \rho d^3 (C_{M_{\alpha_0}} + C_{M_{\alpha_2}} \alpha_t^2) v^4}, \quad (6)$$

де  $C_{M_{\alpha_0}}$ ,  $C_{M_{\alpha_2}} \alpha_t^2$  – відповідно лінійний та квадратичний коефіцієнти перекидального моменту снаряда

(Overturning Moment), з початковими умовами  $\alpha_{t_0} = 0$ .

Кутова швидкість обертання снаряда навколо осі симетрії снаряда дорівнює [1, 3]

$$\dot{p} = \frac{\pi \rho d^4 p v C_{spin}}{8I_x}, \quad (7)$$

з початковими умовами

$$p_0 = \frac{2\pi u_0}{k_c d},$$

де  $k_c$  – відносна довжина ходу нарізів ствола гармати у калібрах;  $u_0$  – початкова швидкість польоту снаряда;  $p_0$  – кутова швидкість снаряда на зрізі ствола гармати.

**2. Аналіз проблеми розв'язку МММТ.** На теперішній час існують різноманітні представлення МММТ. Водночас, загальна проблема полягає в тому, що МММТ визначається додаванням неявного звичайного диференціального рівняння – вектора кута нутації  $\alpha_t$ , який залежить від прискорення польоту снаряда  $\dot{u}$ , що призводить до диференціального рівняння, що визначається неявною функцією.

Для з'ясування цього питання представимо систему диференціальних рівнянь МММТ (1) в наступному вигляді [5, 6]

$$m \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{AF} + \mathbf{EF}, \quad (8)$$

де  $\mathbf{AF}$  – аеродинамічні сили ( $\mathbf{DF}$ ,  $\mathbf{LF}$ ,  $\mathbf{MF}$ ), які функціонально залежать від кута нутації  $\alpha_t$ ;  $\mathbf{EF}$  – зовнішні сили ( $mg$ ;  $m\Lambda$ ), які не залежать від  $\alpha_t$ .

Запишемо рівняння аеродинамічних сил  $\mathbf{AF}$  як функціональну залежність від параметрів

$$\mathbf{AF}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}, \alpha_t) = \mathbf{DF} + \mathbf{LF} + \mathbf{MF}, \quad (9)$$

рівняння зовнішніх сил  $\mathbf{EF}$

$$\mathbf{EF}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}) = m\mathbf{g} + m\Lambda. \quad (10)$$

Перепишемо диференціальне рівняння (8), з врахуванням (9) та (10) у вигляді

$$m \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{AF}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}, \alpha_t(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})) + \mathbf{EF}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p, \mathbf{w}). \quad (11)$$

Кут нутації  $\alpha_t$ , в системі диференціальних рівнянь (11), залежить від  $\dot{u}$ , що робить її неявно визначеною (друге рівняння системи (11)). Так, кут нутації  $\alpha_t$  залежить від прискорення польоту снаряда  $\dot{u}$  та приводить до диференційного рівняння, що визначається неявною функцією. Це робить МММТ такою, що складно розв'язується. Так, щоб почати чисельне інтегрування модифікованих рівнянь руху матеріальної точки, необхідно передбачити величину  $\dot{u}$  використовуючи  $\alpha_{t_0}$  і далі, використовуючи цю величину  $\dot{u}$  – обчислити  $\alpha_t$  використовуючи рівняння (6), і так далі крок за кроком інтегрування [3, 7].

Важливим питанням теоретичного та практичного застосування МММТ є представлення системи диференціальних рівнянь моделі у явному вигляді, що дозволяє розв'язати їх на основі стандартних чисельних методів.

**3. Розробка МММТ у явному вигляді.** Представимо векторне диференціальне рівняння МММТ

$$m\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{DF} + \mathbf{LF} + \mathbf{MF} + m\mathbf{g} + m\mathbf{\Lambda}, \quad (12)$$

в скалярній формі шляхом проектування її правої частини на осі Земної системи координат  $O_0123$  (рис. 3) (без врахування сили Кориоліса).

Враховуючи, що найбільший вплив на рух снаряда в повітрі здійснює сила лобового опору, його аеродинамічний коефіцієнт  $C_D$  варіюється в

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\rho S_M (C_{D0} + C_{D2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)) v v_1}{m} + \frac{1}{2} \frac{\rho S_M C_L v^2 \alpha_1}{m} - \frac{1}{2} \frac{\rho S_M dp C_{mag-f} (\alpha_2 v_3 - \alpha_3 v_2)}{m}; \\ \frac{d}{dt}u_2 &= -\frac{1}{2} \frac{\rho S_M (C_{D0} + C_{D2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)) v v_2}{m} + \frac{1}{2} \frac{\rho S_M C_L v^2 \alpha_2}{m} - \frac{1}{2} \frac{\rho S_M dp C_{mag-f} (-\alpha_1 v_3 - \alpha_3 v_1)}{m} - g; \\ \frac{d}{dt}u_3 &= -\frac{1}{2} \frac{\rho S_M (C_{D0} + C_{D2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)) v v_3}{m} + \frac{1}{2} \frac{\rho S_M C_L v^2 \alpha_3}{m} - \frac{1}{2} \frac{\rho S_M dp C_{mag-f} (\alpha_1 v_2 - \alpha_2 v_1)}{m}. \end{aligned} \quad (13)$$

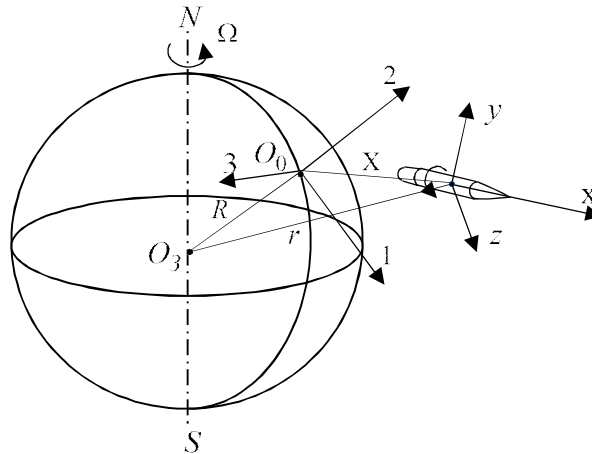


Рис.3. Орієнтація систем координат за стандартом STANAG 4355

Враховуючи лише лінійний коефіцієнт перекидаального моменту  $C_M$ , складові кута нутації (6), в скалярній формі, набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2I_x p \left( v_2 \left( \frac{d}{dt} u_3 \right) - v_3 \left( \frac{d}{dt} u_2 \right) \right)}{\rho S d C_{M_{\alpha_0}} v^4}; \\ \alpha_2 &= \frac{2I_x p \left( -v_1 \left( \frac{d}{dt} u_3 \right) + v_3 \left( \frac{d}{dt} u_1 \right) \right)}{\rho S d C_{M_{\alpha_0}} v^4}; \\ \alpha_3 &= \frac{2I_x p \left( v_1 \left( \frac{d}{dt} u_2 \right) - v_2 \left( \frac{d}{dt} u_1 \right) \right)}{\rho S d C_{M_{\alpha_0}} v^4}. \end{aligned} \quad (14)$$

залежності від величини кута нутації снаряда  $\alpha_t$  та зазвичай виявляє нелінійну поведінку, прийнемо

$$C_D = C_{D0} + C_{D2} \alpha^2,$$

де  $C_{D0}$  – лінійний коефіцієнт лобового опору;

$C_{D2}$  – квадратний коефіцієнт лобового опору,

та приймаючи

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2;$$

$$S_M = \frac{\pi d^2}{4},$$

де  $S_M$  – площа міделя (поперечного перетину снаряда), отримаємо:

Система диференціальних рівнянь (14) є “заплутаною” відносно похідної –  $\frac{d}{dt}u$ , і завдання

постає в розв’язанні її відносно цих похідних.

Для цього введемо наступні позначки:

$$\frac{d}{dt}u_1 = Z_1; \quad \frac{d}{dt}u_2 = Z_2; \quad \frac{d}{dt}u_3 = Z_3, \quad (15)$$

а також три безрозмірних параметри:

$$W = S_M (2m)^{-1}; \quad \hat{I}_x = I_x (W m d^2)^{-1}; \quad \hat{p} = p d v^{-1}, \quad (16)$$

проведемо заміну та покладемо:

- складові повного кута ристання

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{C_M}; \hat{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{C_M}; \hat{\alpha}_3 = \frac{\alpha_3}{C_M};$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{C_M^2};$$

$$\hat{C}_{D_{\alpha^2}} = \frac{C_{D_{\alpha^2}}}{C_M^2}; \hat{C}_L = \frac{C_L}{C_M};$$

$$\hat{C}_{mag-f} = \frac{C_{mag-f}}{C_M},$$

- аеродинамічні коефіцієнти

та, розв'язуючи отриману алгебраїчну систему відносно  $Z$ , і проводячи зворотну заміну, отримуємо:

$$\frac{d}{dt}u_1 = -W\rho v C_{D_0} v_1 - \left( p^2 g v_1 (\hat{C}_{D_2} (v_1^2 + v_3^2))g + W v \rho v_2 (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + \hat{C}_L^2 v^2) \right) \hat{I}_x^2 + g p \rho v^3 \times$$

$$\times \left( d p \hat{C}_{mag-f} v_1 v_2 - v^2 \hat{C}_L v_3 \right) \hat{I}_x W \left( v^3 \rho (W^2 p^2 (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x^2 + 2W d p^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4) \right);$$

$$\frac{d}{dt}u_2 = -W\rho v C_{D_0} v_2 - \left( p^2 g (\hat{C}_{D_2} (v_1^2 + v_3^2))g + W v \rho v_2 (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + \hat{C}_L^2 v^2) \right) W v^2 \hat{I}_x^2 + W d g p^2 \rho v^3 \times$$

$$\times \hat{C}_{mag-f} (v_1^2 + 2v_2^2 + v_3^2) \hat{I}_x + g \rho v^7 \left( v^3 \rho (W^2 p^2 (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x^2 + 2W d p^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4) \right);$$

$$\frac{d}{dt}u_3 = -W\rho v C_{D_0} v_3 - \left( p^2 v_3 g (\hat{C}_{D_2} (v_1^2 + v_3^2))g + W v \rho v_2 (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + \hat{C}_L^2 v^2) \right) \hat{I}_x^2 + g p \rho v^3 \times$$

$$\times \left( d p \hat{C}_{mag-f} v_2 v_3 + v^2 \hat{C}_L v_1 \right) \hat{I}_x W \left( v^3 \rho (W^2 p^2 (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x^2 + 2W d p^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4) \right);$$

Відповідно вираз для кута нутації, набуде вигляду:

$$\alpha_1 = \frac{p(pW(d p \hat{C}_{mag-f} v_3 - \hat{C}_L v_1 v_2) \hat{I}_x + v^2 v_3) g \hat{I}_x}{v^2 \rho (W^2 p^2 (d^2 p^2 \hat{C}_{mag-f}^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x^2 + 2W d p^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4)};$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 W p \hat{C}_L \hat{I}_x (v_1^2 + v_3^2)}{\rho W (d p \hat{C}_{mag-f} v_3 - \hat{C}_L v_1 v_2) \hat{I}_x + v^2 v_3};$$

$$\alpha_3 = \frac{-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2}{v_3}.$$

Отримана система рівнянь (20) є невід'ємною частиною форми МММТ; саме вона дозволяє розрахувати  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  після розрахунку відносно  $v_i$  перетворених до явної форми рівнянь (19).

**4. МММТ у явній формі в сферичній системі координат.** Позначимо швидкість польоту снаряда на траєкторії через вертикальний кут кидання

снаряда –  $\varphi$  та горизонтальний кут між площиною цілі та площиною стрільби –  $\theta$  (рис. 4)

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v \cos \varphi \cos \theta \\ v \sin \varphi \\ v \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix}.$$

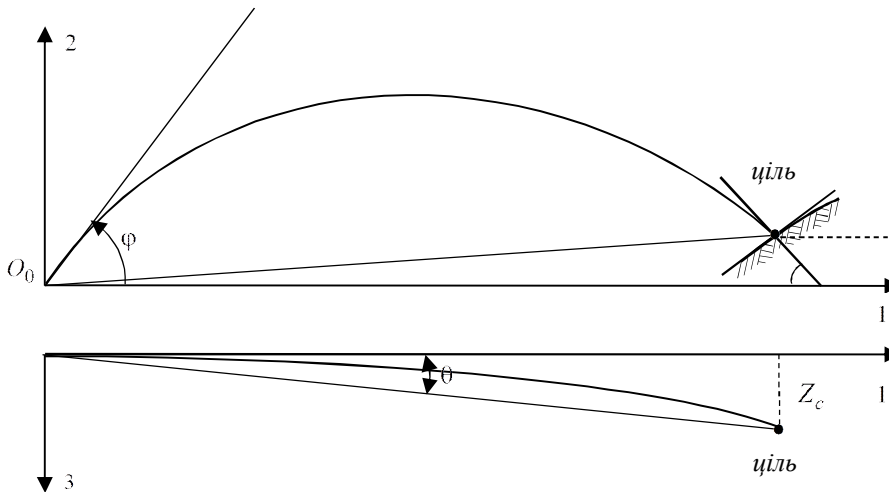


Рис. 4. Куты  $\varphi$  та  $\theta$  польоту снаряда

Приведення МММТ до явного вигляду проведемо за умов наявності вітру ( $w \neq 0$ )

$$u = v + w,$$

відповідно

$$\dot{u} = \frac{d}{dt}(v + w) = \dot{v} + \dot{w}. \quad (22)$$

Складові швидкості вітру надамо як

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

та їх похідні

$$\frac{d}{dt} w = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} w_1 \\ \frac{d}{dt} w_2 \\ \frac{d}{dt} w_3 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Відповідно вираз (22) з врахуванням (23) запишеться як

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_1 &= \frac{d}{dt} v_1 + \frac{d}{dt} w_1; \\ \frac{d}{dt} u_2 &= \frac{d}{dt} v_2 + \frac{d}{dt} w_2; \\ \frac{d}{dt} u_3 &= \frac{d}{dt} v_3 + \frac{d}{dt} w_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Складовою лівої частини диференціального рівняння МММТ (19) є прискорення, що отримує

снаряд на траєкторії польоту, значення якого, з врахуванням (21), в скалярному виді запишеться:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_1 &= \left( \frac{d}{dt} v \right) \cos \varphi \cos \theta - \left( \frac{d}{dt} \varphi \right) v \times \\ &\times \sin \varphi \cos \theta - \left( \frac{d}{dt} \theta \right) v \cos \varphi \sin \theta; \\ \frac{d}{dt} v_2 &= \left( \frac{d}{dt} v \right) \sin \varphi + \left( \frac{d}{dt} \varphi \right) v \cos \varphi; \\ \frac{d}{dt} v_3 &= \left( \frac{d}{dt} v \right) \cos \varphi \sin \theta - \left( \frac{d}{dt} \varphi \right) v \times \\ &\times \sin \varphi \sin \theta + \left( \frac{d}{dt} \theta \right) v \cos \varphi \cos \theta. \end{aligned} \quad (25)$$

Підсумкове прискорення, що отримує снаряд на траєкторії польоту, за умов наявності вітру (24) дорівнює:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_1 &= \left( \frac{d}{dt} w_1 \right) + \left( \frac{d}{dt} v \right) \cos \varphi \cos \theta - \\ &- v \left( \frac{d}{dt} \varphi \right) \sin \varphi \cos \theta - v \left( \frac{d}{dt} \theta \right) \cos \varphi \sin \theta; \\ \frac{d}{dt} u_2 &= \left( \frac{d}{dt} w_2 \right) + \left( \frac{d}{dt} v \right) \sin \varphi + \\ &+ v \left( \frac{d}{dt} \varphi \right) \cos \varphi; \\ \frac{d}{dt} u_3 &= \left( \frac{d}{dt} w_3 \right) + \left( \frac{d}{dt} v \right) \cos \varphi \sin \theta - \\ &- v \left( \frac{d}{dt} \varphi \right) \sin \varphi \sin \theta + v \cos \varphi \left( \frac{d}{dt} \theta \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Підставляючи (21), (26) в (19), отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{d}{dt} v \right) \cos \varphi \cos \theta - v \left( \frac{d}{dt} \varphi \right) \sin \varphi \cos \theta - v \left( \frac{d}{dt} \theta \right) \cos \varphi \sin \theta + \frac{d}{dt} w_1 = \\ &= -(\cos \varphi \left( p^2 (W (d^2 p^2 \hat{C}_{mag-f}^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x + \hat{C}_{mag-f} d v^2) g p \hat{I}_x \sin \varphi + \cos^2 \varphi g^2 p^2 \hat{C}_{D_2} \hat{I}_x^2 + C_{D_0} v^2 p^2 \times \right. \\ &\times \left. (W^2 p^2 (d^2 p^2 \hat{C}_{mag-f}^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x^2 + 2W (d p^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4) \right) \cos \theta - \sin \theta g p p v^3 \hat{C}_L \hat{I}_x) / \\ &\left. / \left( \rho (W^2 p^2 (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x^2 + 2W d p^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4) \right) \right); \\ &\left( \frac{d}{dt} v \right) \sin \varphi + v \left( \frac{d}{dt} \varphi \right) \cos \varphi + \left( \frac{d}{dt} w_2 \right) = \\ &= (-\cos^2 \varphi g^2 p^2 \hat{C}_{D_2} \hat{I}_x^2 + C_{D_0} v^2 p^2 (W^2 p^2 (d^2 p^2 \hat{C}_{mag-f}^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x + 2W d p^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4)) \times \\ &\times W \sin \varphi + (p^2 \hat{I}_x (W (d^2 p^2 \hat{C}_{mag-f}^2 + \hat{C}_L^2 v^2) \hat{I}_x + \hat{C}_{mag-f} d v^2) W \cos^2 \varphi - W^2 \rho^2 (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + \hat{C}_L^2 v^2) \hat{I}_x^2 - \\ &- 2W d p^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x - v^4) \rho g) / (W^2 p^2 (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x^2 + 2W d p^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4); \\ &\left( \frac{d}{dt} v \right) \cos \varphi \sin \theta - v \left( \frac{d}{dt} \varphi \right) \sin \varphi \sin \theta + v \cos \varphi \left( \frac{d}{dt} \theta \right) \cos \theta + \left( \frac{d}{dt} w_3 \right) = \\ &= -(\cos \varphi W \left( p^2 (W (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x + \hat{C}_{mag-f} d v^2) g p \hat{I}_x \sin \varphi + \cos^2 \varphi g^2 p^2 \hat{C}_{D_2} \hat{I}_x^2 + C_{D_0} v^2 p^2 \times \right. \\ &\times \left. (W^2 p^2 (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x^2 + 2W d p^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4) \right) \sin \theta + \cos \theta g p p v^3 \hat{C}_L \hat{I}_x) / \\ &\left. / \left( \rho (W^2 p^2 (\hat{C}_{mag-f}^2 d^2 p^2 + v^2 \hat{C}_L^2) \hat{I}_x^2 + 2W d p^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4) \right) \right); \end{aligned} \quad (27)$$

Розв'язуючи алгебраїчно систему рівнянь (26) відносно похідних шуканої функції та спрощуючи її, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v = & -WC_{D_0} v^2 \rho - \cos \varphi \cos \theta \left( \frac{d}{dt} w_1 \right) - \sin \theta \left( \frac{d}{dt} w_2 \right) - \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{d}{dt} w_3(t) \right) - \\ & - \left( g \left( W \hat{I}_x^2 \hat{C}_{D_2} g p^2 \cos^2 \varphi + \sin \varphi \left( W^2 p^2 \left( d^2 p^2 \hat{C}_{mag-f}^2 + v^2 \hat{C}_L^2 \right) \hat{I}_x^2 + 2Wdp^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4 \right) \rho \right) \right) / \\ & / \left( \rho \left( W^2 p^2 \left( d^2 p^2 \hat{C}_{mag-f}^2 + v^2 \hat{C}_L^2 \right) \hat{I}_x^2 + 2Wdp^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4 \right) \right); \\ \frac{d}{dt} \theta = & - \frac{\cos \theta \sin \varphi \left( \frac{d}{dt} w_1 \right) + \sin \varphi \sin \theta \left( \frac{d}{dt} w_3 \right) - \cos \varphi \left( \frac{d}{dt} w_2 \right)}{v} - \\ & - \frac{\cos \varphi g v \left( Wdp^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^2 \right)}{v^4 + Wp^2 \hat{I}_x \left( W \hat{C}_L^2 \hat{I}_x + 2d \hat{C}_{mag-f} \right) v^2 + W^2 d^2 p^2 \hat{C}_{mag-f}^2 \hat{I}_x^2}; \\ \frac{d}{dt} \varphi = & \frac{\sin \varphi \left( \frac{d}{dt} w_1 \right) - \cos \varphi \left( \frac{d}{dt} w_3(t) \right)}{v \cos \varphi} - \frac{Wgp v^2 \hat{I}_x \hat{C}_L}{W^2 p^2 \left( \left( d^2 p^2 \hat{C}_{mag-f}^2 + v^2 \hat{C}_L^2 \right) \hat{I}_x^2 + 2Wdp^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x \right) + v^4}. \end{aligned} \quad (28)$$

Проведемо відповідно заміни координат в рівняннях кута нугації снаряда (20):

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \frac{p \left( -Wdp^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x - v^2 \right) \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta Wp v \hat{C}_L \hat{I}_x}{C_M v \rho \left( W^2 p^2 \left( d^2 p^2 \hat{C}_{mag-f}^2 + v^2 \hat{C}_L^2 \right) \hat{I}_x^2 + 2Wdp^2 v^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x + v^4 \right)} g \cos \varphi \hat{I}_x; \\ \alpha_2 = & \frac{\alpha_1 Wp \hat{C}_L \hat{I}_x v \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \theta Wp v \hat{C}_L \hat{I}_x - \sin \theta Wdp^2 \hat{C}_{mag-f} \hat{I}_x - \sin \theta v^2}; \\ \alpha_3 = & \frac{-\alpha_1 \cos \theta \cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi}{\sin \theta \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отримана система рекурентних рівнянь дозволяє обчислити  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  після розрахунку відносно  $v, \theta, \varphi$  перетворених до явної форми рівнянь (28).

### Висновок

Представлена МММТ як математична модель польоту снаряда, в якій враховуються всі аеродинамічні сили, орієнтація снаряда характеризується врахуванням кута нугації, а кінетична енергія обертального руху враховується через кутову швидкість снаряда навколо його осі симетрії. Показано, що практичне застосування МММТ обмежується наявністю неявного звичайного диференціального рівняння. Так, кут нугації, в МММТ, залежить від прискорення польоту снаряда, що приводить до диференційного рівняння, що визначається неявною функцією. Неявне диференціальне рівняння визначає похідну як неявну функцію, тобто рівняння не розв'язане відносно похідної. Це робить МММТ такою, що складно розв'язується.

Розкриті процедури перетворення системи диференціальних рівнянь МММТ до явного вигляду, що дозволяє розв'язати їх на основі стандартних чисельних методів. Знайшла подальшого розвитку

замкнута система диференціальних рівнянь МММТ, яка представлена в сферичних системах координат  $v, \theta, \varphi$ , а також алгебраїчна система рівнянь для кутів нугації  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Подальшим напрямом досліджень є врахування в рівняннях МММТ нелінійних членів розкладу перекидального моменту в ряд Тейлора за кутом нугації та оцінка його впливу на параметри польоту снаряда.

### Список літератури

1. McCoy R. L. Modern Exterior Ballistics. Atglen, PA. : Schiffer Military History, 2012. 328 p.
2. Дмитриевский А. А., Лисенко Л. Н. Внешняя баллистика: учебник. Москва : Машиностроение, 2005. 607 с.
3. STANAG 4355 (Edition 3), The modified point mass and five degrees of freedom trajectory models: NSAI0454(2009)-JAIS/4355, dated 17 April 2009. 95 p. (NATO Standardization Agency).
4. Carlucci D. E., Jacobson S. S. Ballistics, theory and design of guns and ammunition : book. London, New York : Taylor & Francis Group, 2007. 514 p.

5. Baranowski L., Gadomski B., Majewski P. and Szymonik J. Explicit “ballistic M-model”: a refinement of the implicit “modified point mass trajectory model”. Bulletin of the Polish Academy of sciences technical sciences. 2016. Vol. 64, No. 1, pp. 81-89. DOI: 10.1515/bpasts-2016-0010.

6. Kincaid D. Numerical analysis. Brooks : Cole Publishing Company. 1991. 690 p.

7. Bradley J.W. An alternative form of the modified point-mass equation of motion. Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Maryland, Report № BRL-MR-3875, 1990.

## References

1. McCoy R. L. Modern Exterior Ballistics. Atglen, PA. : Schiffer Military History, 2012. 328 p.

2. Dmitriyevskiy A. A. and Lisenko L. N. (2005). “Vneshnyaya ballistika” [External ballistics]: Moskva : Mashinostroyeniye, 607 p. [in Russian].

3. STANAG 4355 (Edition 3), The modified point mass and five degrees of freedom trajectory models: NSAI0454(2009)-JAIS/4355, dated 17 April 2009. 95 p. (NATO Standardization Agency).

4. Carlucci D. E., Jacobson S. S. Ballistics, theory and design of guns and ammunition : book. London, New York : Taylor & Francis Group, 2007. 514 p.

5. Baranowski L., Gadomski B., Majewski P. and Szymonik J. Explicit “ballistic M-model”: a refinement of the implicit “modified point mass trajectory model”. Bulletin of the Polish Academy of sciences technical sciences. 2016. Vol. 64, No. 1, pp. 81-89. DOI: 10.1515/bpasts-2016-0010.

6. Kincaid D. Numerical analysis. Brooks : Cole Publishing Company. 1991. 690 p.

7. Bradley J.W. An alternative form of the modified point-mass equation of motion. Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Maryland, Report № BRL-MR-3875, 1990.

## EXPLICIT FORM OF THE MODIFIED MODEL OF THE MATERIAL POINT IN THE SPHERICAL COORDINATE SYSTEM

R. Bubenshchikov

*Projectile movement can be described by one of three mathematical models, which differ from each other in the main level of complexity and, accordingly, the level of adequacy to the real process of projectile movement in the air. Differential equations are the basis of mathematical models that characterize the spatial movement of a projectile. A modified model of a material point is presented, as a mathematical model of the flight of a projectile moving in the air; as components of the main vector of the acting forces, the components of the full aerodynamic force are taken into account - the force of frontal resistance and the lifting force, the Magnus force. The differential equations of the modified material point model additionally take into account the rotational motion of the projectile around its axis of symmetry, as well as nutational oscillations of the projectile. It is shown that the practical application of the modified material point model is limited by the presence of an implicit ordinary differential equation. Thus, the total yaw angle, in the modified material point model, depends on the acceleration of the projectile flight, which leads to a differential equation determined by an implicit function. An implicit differential equation defines the derivative as an implicit function, that is, the equation is unsolved with respect to the derivative. This makes the modified material point model difficult to solve. The article describes the procedures for transforming the system of differential equations of the modified material point model into an explicit form, which allows them to be solved on the basis of standard numerical methods. A closed system of differential equations based on the trajectory parameters of the projectile flight is obtained, which is presented in spherical coordinate systems, as well as a system of algebraic equations for projectile nutation angles.*

**Keywords:** mathematical model, modified model, nutation angle, aerodynamic forces (moments), projectile, differential equations, spherical coordinates, implicit function

УДК 621.39

DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.29.2023.10-26>

Б.Ю. Волочій<sup>1,2</sup>, В.А. Онищенко<sup>1</sup>, Л.Д. Озірковський<sup>1,2</sup>, В.В. Хахула<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів

<sup>2</sup>Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

Article history: Received 18 September 2023; Revised 19 September 2023; Accepted 30 September 2023

## ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТЕЙ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ВІЯВЛЕННЯ БЕЗПЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

*Розглядаються варіанти формування радіоелектронних комплексів виявлення БпЛА з використанням в їх складі радіолокаційної, оптико-електронної, тепловізійної та акустичної систем із заданими значеннями показників ефективності при автономному їх застосуванні. Показані результати порівняння ефективності*