7. Liang Ke. Optimal design of the aerodynamic parameters for supersonic two-dimensional guided artillery projectile / Ke Liang, Zheng Huang, Jing-min Zhang // Defence Technology. – 2017. – №13. – P. 206-211. http://dx.doi.org/ 10.1016/ j.dt.2017.05.003/

8. Theoretical and experimental research of supersonic missile ballistics / B. Zygmunt, K. Motyl, B. Machowski, M. Makowski, E. Olejniczak, T. Rasztabiga // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. – 2015. – 63(1). – P. 229-233. https://doi.org/10.1515/bpasts-2015-0027/

9. Grabchak, V.I. and Bondarenko, S.V. «Analiz isnuyuchyh ta perspektyvnyh metodiv vyznachennya syly oporu povitrya ruhu snaryadiv» [Analysis of existing and perspective methods for determining the air resistance force of the projectiles movement], Military Technical Collection. No. №2(9). – C. 13-19. https://doi.org/10.33577/2312-4458.9.2013.13-19.

10. Velychko L., Petruchenko O., Tereshchuk O., Nanivskiy R. (2021), "Zovnishnia balistica snariada, vipyschenogo z gaubici". [Exterior ballistics howitzer projectile]. *Military Technical Collection.* Lviv, 2021. № 24. C. 13-20. DOI: https://doi.org/10.33577/2312-4458.24.2021.13-20\[in Ukrainian]

11. Abridged FT 155-AR-2, Part 1. Firing Tables for Cannon, 155MM Howitzer, M284 on Howitzer, Medium, Self-propelled, 155MM, M109A5, M109A6 and M109A7 and Cannon, 155MM Howitzer, M776 on Howitzer, MEDIUM, Towed, 155MM, M777, M777A1 and M777A2 Firing Projectile, HE, M795. Controlled By: U.S. Army DEVCOM Armaments Center. (U) Headquarters, Department of the Army. Washington, DC, 15 April 2020. p. 572.

MOVEMENT CHARACTERISTICS OF A PROJECTILE AT THE FINAL STAGE WITH SUPERSONIC SPEED

P. Tkachyck, L. Velychko, M. Voitovych, M. Sorokatyi

One of the key challenges in studying the movement of a projectile in the air is determining the functional relationship between the air resistance force and the projectile's velocity. Obtaining this relationship analytically can be quite problematic. Therefore, discrete dependencies between the Mach number and the drag coefficient for a specific type of projectile are established through experimental research. These relationships are used to determine the values of the aerodynamic drag force, which are crucial for solving problems in external ballistics.

The authors have developed a methodology for determining the functional relationship between the aerodynamic drag force and the projectile's velocity, the speed of sound in the air, and some other factors based on solving the inverse dynamics problem. Experimental studies indicate that there are three different stages of aerodynamic drag force behavior: during the movement of the projectile at supersonic, subsonic, and transonic speeds. Therefore, the functional dependence of the aerodynamic drag force on the projectile's motion is determined separately for supersonic, subsonic, and transonic speeds. The shooting tables provide discrete dependencies between the aiming angle and the projectile's flight distance. The dynamics of the projectile are significantly influenced by the aerodynamic drag force, the projectile's weight, and the Coriolis force. Since the magnitudes and directions of the weight and Coriolis force are known, solving the inverse mechanics problem allows us to determine the values of the aerodynamic drag force. However, a particular feature of the projectile's motion at the final stages with subsonic or supersonic speeds, which are increasing, is the emergence of an additional lateral air pressure force. This force is initiated by the variable velocity vector in the front part of the projectile. As a result of mathematical research, it has been established that the lateral air pressure force is directed perpendicular to the projectile's velocity direction within its trajectory, and its average value has been determined. It has also been found that its magnitude depends on the direction of the velocity and the altitude transition of the projectile's speed from subsonic to supersonic. Trajectory graphs of the projectile's motion and speed are provided for the final stage when its speed is increasing from subsonic to supersonic. A comparison of the kinematic parameters of the projectile's motion determined by the authors' method with the results provided in the shooting tables reveals certain discrepancies.

Keywords: *external ballistics, projectile motion dynamics, aerodynamic drag force, supersonic projectile speed.*

УДК 519.8 DOI: https://doi.org/10.33577/2312-4458.29.2023.71-81

О.К. Фурсенко, Н.М. Черновол, Г.М. Антоненко

Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

Article history: Received 18 July 2023; Revised 25 July 2023; Accepted 30 September 2023

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БОЙОВИХ ДІЙ НА ДВОХ ДІЛЯНКАХ ЗІТКНЕННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ І ПАКЕТА СИМВОЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ WOLFRAM MATHEMATICA

Робота присвячена важливій проблемі моделювання бойових дій на різних ділянках зіткнення з можливістю перерозподілу бойових ресурсів в ході бою. Сформульована задача динамічного програмування з функцією цілі як функцією втрат супротивника, що визначаються за допомогою системи диференціальних рівнянь Ланчестера в умовах "високоорганізованого" бою, потребує використання однієї з систем комп'ютерних обчислень. В роботі за допомогою пакета Wolfram Mathematica наводиться комп'ютерна *реалізація та приклади розв'язання задачі знаходження оптимальної кількості бойових одиниць, яку має розподілити перша сторона в початковий момент часу і ще в деякий наступний момент часу по двох ділянках зіткнення з метою завдати максимальних втрат другій стороні (противнику) до певного заданого подальшого моменту часу. Зроблено аналіз результатів розв'язання прикладів.*

***Ключові слова**: рівняння динаміки бою, функція цілі як функція втрат, ділянки зіткнення, перерозподіл бойових одиниць, ефективна скорострільність, максимізація втрат, допустимість параметрів перерозподілу.*

Постановка проблеми

Максимізація втрат противника є основною задачею сторін на різних ділянках зіткнення. Математична модель перерозподілу бойових ресурсів в ході бою з цією метою в різні моменти часу приводить до необхідності розв'язання задачі динамічного програмування.

Знаходження максимуму цільової функції як функції втрат противника у зв'язку з її складністю потребує комп'ютерних обчислень. В даній роботі для цього було використано пакет Wolfram Mathematica, основною перевагою якого над іншими відомими пакетами (Maple, Mathcad, Mathlab та іншими) є можливість виконувати як чисельні розрахунки, так і аналітичні (символьні) перетворення. Все це важливо, як показує розглянута в статті задача, для моделювання бойових дій в загальному випадку на n ділянках зіткнення з перерозподілом в m моментів часу, коли цільова функція буде мати досить громіздкий вигляд. Тому доцільно з'ясувати особливості моделювання бойових дій в такій постановці саме за допомогою цього пакета на прикладі більш простої задачі, коли $n = 2$ і $m = 2$.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В роботі [1] методом динамічного програмування (див. [2]) із застосуванням систем диференціальних рівнянь Ланчестера (див. [3]), що описують динаміку бою між моментами перерозподілу бойових одиниць по двох ділянках зіткнення однією зі сторін, розв'язана задача знаходження максимальних втрат іншої сторони до заданого моменту часу, а також відповідної оптимальної кількості бойових одиниць, які потрібно розподіляти активною стороною по ділянках в певні моменти часу. Розв'язання цієї задачі потребує використання комп'ютера, зокрема це можна зробити у Wolfram Mathematica – пакеті символьної математики, який може виконувати аналітичні та чисельні розрахунки [4,5]. Окремі питання використання даної системи, зокрема при дослідженні моделей бойових дій, висвітлені у роботі [6]. Застосовуються комп'ютерні пакети або програми і при дослідженні моделей бойових дій, наприклад, в роботах [7-10] .

Для моделювання динаміки бою використовуються системи диференціальних рівнянь Ланчестера, застосування яких з різними параметрами підтверджується і останніми публікаціями, наприклад, [11, 12].

Відзначимо, що матеріал даної статті розглянуто на конференції [13].

Мета статті

Розв'язати за допомогою пакета Wolfram Mathematica задачу максимізаціїї втрат супротивника по двох параметрах (кількостях бойових одиниць, які має можливість одна сторона розподілити на першу ділянку зіткнення в початковий момент часу і перекинути з першої ділянки на другу в деякий наступний момент часу), враховуючи допустимість цих параметрів. Навести приклади і проаналізувати результати їх розв'язання.

Виклад основного матеріалу

1. Вхідні дані задачі та отримані результати. Наведемо постановку задачі (див. [1]).

1. Розглядається бій між двома угрупованнями: сторонами 1, 2 з чисельностями K, L відповідно. Сторони воюють на двох ділянках зіткнення. Вони мають однорідні бойові одиниці, не обов'язково однорідні між собою.

2. В момент часу $t_0 = 0$ на першу ділянку зіткнення розподіляється деяка кількість бойових одиниць K_1 сторони 1 (ефективна скорострільність кожної бойової одиниці дорівнює α_1) і деяка кількість бойових одиниць L_1 сторони 2 (ефективна скорострільність – α_2); на другу ділянку, відповідно, $K - K_1$ одиниць сторони 1 (ефективна скорострільність $-\alpha_1$) і $L - L_1$ одиниць сторони 2 (ефективна скорострільність $-\alpha'_2$).

3. В момент часу $t_1 > t_0$ з першої ділянки на другу перекидається деяка кількість K_2 не ушкоджених бойових одиниць сторони 1.

4. Бій продовжується до моменту часу $t_2 > t_1$.

5. Для моделювання динаміки бою використовуються системи диференціальних рівнянь Ланчестера. Вважається, що між моментами часу t_k і t_{k+1} $(k = 0,1)$ бій відбувається за умов "високоорганізованого бою" [3].

6. Після перерозподілу бойових одиниць сторони 1 з першої ділянки на другу відбувається зміна середньої ефективної скорострільності бойових одиниць сторони 1. Середня ефективна скорострільність сторони 2 залишається незмінною.

Задача полягає в тому, що на кожному з двох етапів бою, починаючи з останнього (згідно з методом динамічного програмування), необхідно максимізувати адитивну функцію цілі, що є сумою втрат сторони 2 на двох ділянках зіткнення в моменти часу t_1, t_2 за параметрами K_1 і K_2, відповідно. При цьому кількість неушкоджених одиниць обох сторін як функції часу знаходяться за допомогою відповідних розв'язків систем диференціальних рівнянь Ланчестера із заданими початковими умовами, що залежать від параметрів K_1 і K_2 [1].

Втрати сторони 2 на другому етапі бою, тобто від моменту часу t_1 до моменту часу t_2, позначаються $w_2(K_1, K_2)$ і обчислюються за формулою

$$w_2(K_1,K_2) = x_2(t_1,K_1) - \hat{x}_2(t_2,K_1,K_2) + \\ + y_2(t_1,K_1) - \hat{y}_2(t_2,K_1,K_2),$$

де кількості неушкоджених бойових одиниць сторони 2, відповідно, в моменти часу t_1, t_2:

на першій ділянці

$$x_2(t_1,K_1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}K_1\left(-e^{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}t_1} + e^{-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}t_1}\right) + \\ + \frac{1}{2}L_1\left(e^{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}t_1} + e^{-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}t_1}\right), \quad (1)$$

на другій ділянці

$$y_2(t_1,K_1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2'}}K_1\left(e^{\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1} - e^{-\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1}\right) + \\ + \frac{1}{2}(L-L_1)\left(e^{\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1} + e^{-\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1}\right) + \\ + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2'}}K\left(-e^{\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1} + e^{-\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1}\right), \quad (2)$$

на першій ділянці

$$\hat{x}_2(t_2,K_1,K_2) = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1''}{\alpha_2}}K_2\left(e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_2-t_1)} - e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_1-t_2)}\right) + \\ + \frac{1}{2}x_2(t_1,K_1)\left(e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_2-t_1)} + e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_1-t_2)}\right) + \\ + \frac{1}{2}x_1(t_1,K_1)\left(-e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_2-t_1)} + e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_1-t_2)}\right), \quad (3)$$

на другій ділянці

$$\hat{y}_2(t_2,K_1,K_2) = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'}}K_2\left(-e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_2-t_1)} + e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_1-t_2)}\right) + \\ + \frac{1}{2}y_2(t_1,K_1)\left(e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_2-t_1)} + e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_1-t_2)}\right) + \\ + \frac{1}{2}y_1(t_1,K_1)\left(-e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_2-t_1)} + e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_1-t_2)}\right). \quad (4)$$

Кількості неушкоджених бойових одиниць сторони 1, відповідно, в моменти часу t_1, t_2 :на першій ділянці

$$x_1(t_1,K_1) = \frac{1}{2}K_1\left(e^{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}t_1} + e^{-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}t_1}\right) + \\ + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}L_1\left(-e^{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}t_1} + e^{-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}t_1}\right), \quad (5)$$

на другій ділянці

$$y_1(t_1,K_1) = \frac{1}{2}K_1\left(-e^{\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1} - e^{-\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1}\right) + \\ + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1}}(L-L_1)\left(-e^{\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1} + e^{-\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1}\right) + \\ + \frac{1}{2}K\left(e^{\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1} + e^{-\sqrt{\alpha_1\alpha_2'}t_1}\right), \quad (6)$$

на першій ділянці

$$\hat{x}_1(t_2,K_1,K_2) = \\ = \frac{1}{2}K_2\left(-e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_2-t_1)} - e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_1-t_2)}\right) + \\ + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1''}}x_2(t_1,K_1)\left(-e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_2-t_1)} + e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_1-t_2)}\right) + \\ + \frac{1}{2}x_1(t_1,K_1)\left(e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_2-t_1)} + e^{\sqrt{\alpha_1''\alpha_2}(t_1-t_2)}\right), \quad (7)$$

на другій ділянці

$$\hat{y}_1(t_2,K_1,K_2) = \\ = \frac{1}{2}K_2\left(e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_2-t_1)} + e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_1-t_2)}\right) + \\ + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'}}y_2(t_1,K_1)\left(-e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_2-t_1)} + e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_1-t_2)}\right) + \\ + \frac{1}{2}y_1(t_1,K_1)\left(e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_2-t_1)} + e^{\sqrt{\alpha_1'\alpha_2'}(t_1-t_2)}\right). \quad (8)$$

Відповідні змінені ефективні скорострільності першої сторони після часу t_1 на першій і другій ділянках, відповідно,

$$\alpha_1'' = \alpha_1\left(1 - \frac{K_2}{x_1(t_1,K_1)}\right); \quad \alpha_1' = \alpha_1\left(1 + \frac{K_2}{x_1(t_1,K_1)}\right).$$

Така зміна ефективних скорострільностей першої сторони (на другій ділянці вона зросте, а на першій зменшиться) обумовлена, наприклад, перерозподілом бойових одиниць на передових позиціях ділянок зіткнення або заміною озброєння на більш чи менш ефективне.

Цільова функція на другому етапі бою:

$$W_2(K_1) = \max_{\left[\tilde{K}_2;\tilde{\tilde{K}}_2\right] \subset \left[0;[x_1(t_1;K_1)]-1\right]} w_2(K_1,K_2).$$

Тут $[x_1(t_1;K_1)]$ – ціла частина числа $x_1(t_1;K_1)$.

Сумарні втрати за весь бій становлять величину

$$w_1(K_1) = L - x_2(t_1, K_1) - y_2(t_1, K_1) + W_2(K_1).$$

Кінцева цільова функція за підрахунками сумарних максимальних втрат сторони 2 за весь бій має вигляд:

$$W_1 = \max_{\left[\widetilde{K}_1;\widetilde{\widetilde{K}}_1\right]\subset[2;K-1]} w_1(K_1).$$

2. Приклади та їх розв'язання за допомогою пакета Wolfram Mathematica.

Приклад 1. За умов 1-6 відбувається бій між двома угрупованнями: стороною 1 і стороною 2. (Для перевірки роботи запропонованої моделі взяті числа, які спрощують обчислення. В подальшому їх можна буде прив'язати до конкретної статистики бойових дій). Сторона 1 має 60 бойових одиниць, середня ефективна скорострільність кожної бойової одиниці – 2,4 постріли за годину. Друга сторона має 90 бойових одиниць, причому на першу ділянку розподілено 60 бойових одиниць з середньою ефективною скорострільністю 1,4 постріли за годину, а на другу ділянку – 30 бойових одиниць з середньою ефективною скорострільністю 2 постріли за годину. Яку кількість бойових одиниць потрібно розподілити стороні 1 на першу ділянку в початковий момент часу і перекинути з першої ділянки на другу через 0,2 години, щоб через 0,3 години сторона 2 мала найбільші втрати?

Розв'язання полягає в наступному:

У Wolfram Mathematica вводимо початкові умови задачі у вигляді списку: початкові кількості бойових одиниць сторін 1 і 2, кількість бойових одиниць сторони 2 на другій ділянці, середні ефективні скорострільності сторін 1 і 2 на ділянках 1 та 2. Наступним кроком вводимо формули для обчислення кількості неушкоджених бойових одиниць в момент часу t_1 сторін 1, 2 на обох ділянках:

```
{K, L, L1, a1, a2, a2p} = {60, 90, 60, 2.4, 1.4, 2};
```

$$\texttt{x1[t1\_, K1\_]} = \frac{1}{2} * K1 * \left(e^{\sqrt{a1*a2}*t1} + e^{-\sqrt{a1*a2}*t1}\right) + \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{a2}{a1}} * L1 * \left(-e^{\sqrt{a1*a2}*t1} + e^{-\sqrt{a1*a2}*t1}\right);$$

$$\texttt{x2[t1\_, K1\_]} = \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{a1}{a2}} * K1 * \left(-e^{\sqrt{a1*a2}*t1} + e^{-\sqrt{a1*a2}*t1}\right) + \frac{1}{2} * L1 * \left(e^{\sqrt{a1*a2}*t1} + e^{-\sqrt{a1*a2}*t1}\right);$$

$$\texttt{y1[t1\_, K1\_]} = \frac{1}{2} * K1 * \left(-e^{\sqrt{a1*a2p}*t1} - e^{-\sqrt{a1*a2p}*t1}\right) + \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{a2p}{a1}} * (L - L1) * \left(-e^{\sqrt{a1*a2p}*t1} + e^{-\sqrt{a1*a2p}*t1}\right) + \frac{1}{2} * K * \left(e^{\sqrt{a1*a2p}*t1} + e^{-\sqrt{a1*a2p}*t1}\right);$$

$$\texttt{y2[t1\_, K1\_]} = \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{a1}{a2p}} * K1 * \left(e^{\sqrt{a1*a2p}*t1} - e^{-\sqrt{a1*a2p}*t1}\right) + \frac{1}{2} * (L - L1) * \left(e^{\sqrt{a1*a2p}*t1} + e^{-\sqrt{a1*a2p}*t1}\right) + \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{a1}{a2p}} * K * \left(-e^{\sqrt{a1*a2p}*t1} + e^{-\sqrt{a1*a2p}*t1}\right);$$

Зазначимо, що для заданого часу t_1 параметр K_1 може приймати лише допустимі значення, виходячи з умов, що на кожну ділянку зіткнення має бути розподілена принаймні одна бойова одиниця і всі розв'язки (1), (2), (5), (6) мають бути додатними при цих значеннях K_1.

Наступними кроками відсікаємо всі значення параметра K_1, при яких кількість неушкоджених бойових одиниць сторони 1 на першій ділянці стає менше двох або кількості неушкоджених бойових одиниць сторони 1 на першій ділянці та сторони 2 на обох ділянках стають від'ємними і встановлюємо значення K_1 – кількість бойових одиниць, яку можна розподілити стороні 1 на перше поле в початковий момент часу. За виведеними результатами бачимо, що K_1 може приймати значення від 18 до 48 (якщо на першу ділянку в початковий момент розподілити 17 бойових одиниць, то в момент часу t_1 немає чого перекидати на другу ділянку, а якщо на першу ділянку в початковий момент розподілити 49 бойових одиниць, то на другій ділянці для сторони 1 бій закінчиться раніше часу $t_1 = 0,2$ год.). Наступний код виводить K_1 і четвірки $(x_1; x_2; y_1; y_2)$.:

```
k = 2; t1 = 0.2;
While[! (x1[t1, k] >= 2 && x2[t1, k] > 0 && y1[t1, k] > 0 && y2[t1, k] > 0) , k = k + 1]
Print[k]

18

While[(x1[t1, k] >= 2 && x2[t1, k] > 0 && y1[t1, k] > 0 && y2[t1, k] > 0) , k = k + 1]
Print[k]

49
```

```
t1 = 0.2;
For[k = 17, k < 50, k++, Print[k, "     ", {x1[t1, k], x2[t1, k], y1[t1, k], y2[t1, k]}]]
17    {0.976395, 55.7333, 34.8068, 11.6195}
18    {2.04435, 55.2425, 33.7092, 12.115}
19    {3.11231, 54.7517, 32.6117, 12.6105}
20    {4.18026, 54.2609, 31.5141, 13.1061}
21    {5.24822, 53.77, 30.4166, 13.6016}
22    {6.31618, 53.2792, 29.319, 14.0971}
23    {7.38413, 52.7884, 28.2215, 14.5926}
24    {8.45209, 52.2976, 27.1239, 15.0881}
25    {9.52004, 51.8067, 26.0264, 15.5836}
26    {10.588, 51.3159, 24.9289, 16.0791}
27    {11.656, 50.8251, 23.8313, 16.5746}
28    {12.7239, 50.3343, 22.7338, 17.0701}
29    {13.7919, 49.8435, 21.6362, 17.5656}
30    {14.8598, 49.3526, 20.5387, 18.0611}
31    {15.9278, 48.8618, 19.4411, 18.5566}
32    {16.9957, 48.371, 18.3436, 19.0521}
33    {18.0637, 47.8802, 17.246, 19.5477}
34    {19.1316, 47.3893, 16.1485, 20.0432}
35    {20.1996, 46.8985, 15.0509, 20.5387}
36    {21.2676, 46.4077, 13.9534, 21.0342}
37    {22.3355, 45.9169, 12.8559, 21.5297}
38    {23.4035, 45.426, 11.7583, 22.0252}
39    {24.4714, 44.9352, 10.6608, 22.5207}
40    {25.5394, 44.4444, 9.56321, 23.0162}
41    {26.6073, 43.9536, 8.46567, 23.5117}
42    {27.6753, 43.4627, 7.36812, 24.0072}
43    {28.7433, 42.9719, 6.27058, 24.5027}
44    {29.8112, 42.4811, 5.17303, 24.9982}
45    {30.8792, 41.9903, 4.07548, 25.4938}
46    {31.9471, 41.4994, 2.97794, 25.9893}
47    {33.0151, 41.0086, 1.88039, 26.4848}
48    {34.083, 40.5178, 0.782847, 26.9803}
49    {35.151, 40.027, -0.314699, 27.4758}
```

Далі для кожного K_1 в раніше знайдених допустимих межах знаходимо допустимі значення параметра K_2 (тобто, яку кількість бойових одиниць із числа $x_1(t_1, K_1)$ одиниць сторони 1, що залишись неушкодженими на першій ділянці, можна перекинути на другу ділянку). Для цього знаходимо $\widetilde{K}_2$ і $\widetilde{\widetilde{K}}_2$ такі, щоб для всіх цілих $K_2 \in \left[\widetilde{K}_2; \widetilde{\widetilde{K}}_2\right]$ на першій ділянці зіткнення після перекидання бойових одиниць на другу ділянку залишилась принаймні одна одиниця і розв'язки (3), (4), (7), (8) були додатними. Справедливо, що $\left[\widetilde{K}_2; \widetilde{\widetilde{K}}_2\right] \subset \left[0; \left[x_1(t_1 K_1)\right] - 1\right]$. Якщо для деякого K_1 не підбираються $\widetilde{K}_2$ і $\widetilde{\widetilde{K}}_2$ за зазначеними вище умовами, то таке K_1 потрібно виключити з розгляду.

Далі наводиться код (див. код 1) за підрахунком кількості бойових одиниць обох сторін, що залишились неушкодженими в момент часу t_2.

Код 1:

```
x2c[t2_, k_, k2_] =
  (a1p = a1 * (1 - k2/x1[t1, k]); 1/2 * Sqrt[a1p/a2] * k2 * (e^(Sqrt[a1p*a2] * (t2-t1)) - e^(Sqrt[a1p*a2] * (t1-t2))) +
    1/2 * x2[t1, k] * (e^(Sqrt[a1p*a2] * (t2-t1)) + e^(Sqrt[a1p*a2] * (t1-t2))) + 1/2 * x1[t1, k] * (-e^(Sqrt[a1p*a2] * (t2-t1)) + e^(Sqrt[a1p*a2] * (t1-t2))));

y2c[t2_, k_, k2_] = (a1pp = a1 * (1 + k2/x1[t1, k]);
   1/2 * Sqrt[a1pp/a2p] * k2 * (-e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t2-t1)) + e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t1-t2))) + 1/2 * y2[t1, k] * (e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t2-t1)) + e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t1-t2))) +
    1/2 * y1[t1, k] * (-e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t2-t1)) + e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t1-t2))));

 x1c[t2_, k_, k2_] = (a1p = a1 * (1 - k2/x1[t1, k]);
    1/2 * k2 * (-e^(Sqrt[a1p*a2] * (t2-t1)) - e^(Sqrt[a1p*a2] * (t1-t2))) + 1/2 * Sqrt[a2/a1p] * x2[t1, k] * (-e^(Sqrt[a1p*a2] * (t2-t1)) + e^(Sqrt[a1p*a2] * (t1-t2))) +
     1/2 * x1[t1, k] * (e^(Sqrt[a1p*a2] * (t2-t1)) + e^(Sqrt[a1p*a2] * (t1-t2))));

 y1c[t2_, k_, k2_] = (a1pp = a1 * (1 + k2/x1[t1, k]);
    1/2 * k2 * (e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t2-t1)) + e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t1-t2))) + 1/2 * Sqrt[a2p/a1pp] * y2[t1, k] * (-e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t2-t1)) + e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t1-t2))) +
     1/2 * y1[t1, k] * (e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t2-t1)) + e^(Sqrt[a1pp*a2p] * (t1-t2))));
```

Наступний код (див. код 2) для кожного допустимого K_1 визначає допустимі K_2. В ньому формується масив у масиві (внутрішній масив KI формує список пар $(K_1;K_2)$ для фіксованого значення параметра K_1, а зовнішній масив A − перебирає списки по всіх K_1). Виведено пари допустимих значень параметрів $(K_1;K_2)$, причому одному значенню K_1 може відповідати декілька значень K_2. Зауважимо, значення параметра K_1 від 18 до 22, які були виявлені на першому етапі програми, виключаються з розгляду. Тому в наступному коді (див. код 3) формується масив AA, який виключає порожні пари з масиву A. Далі в цьому коді для кожної пари $(K_1;K_2)$ підраховуються втрати сторони 2 на другому етапі бою, а саме $w_2(K_1,K_2)$, і для кожного K_1 знаходяться найбільші втрати $W_2(K_1)$ по всіх відповідних K_2 із внутрішнього масиву KI, запам'ятовується оптимальне K_2 і обчислюються втрати сторони 2, а саме $w_1(K_1)$. Формується масив F четвірок. $(K_1;K_2(\text{оптимальне});W_2(K_1);w_1(K_1))$ Нижче наведено три коди і результати сформульованих обчислень.

Код 2:

```
t1 = 0.2; k = 18; t2 = 0.3; A = {}; AA = {}; KI = {}; F = {};
Do[
 A = Append[A, KI];
  KI = {};
 i = 0;
 cx = x1[t1, k] - 1;
While[0 ≤ i && i < cx,
 X1c = x1c[t2, k, k2] /. {k2 → i};
 Y1c = y1c[t2, k, k2] /. {k2 → i};
 X2c = x2c[t2, k, k2] /. {k2 → i};
 Y2c = y2c[t2, k, k2] /. {k2 → i};
  Print[X1c, Y1c, X2c, Y2c, "     ", i, "     ", k, "    ", cx];
 If[X2c > 0 && Y2c > 0 && X1c > 0 && Y1c > 0 ,
  KI = Append[KI, {k, i}];
  i = i + 1,
  i = i + 1; Continue[]]],
{k, 18, 49}]
```

Код 3:

```
n = Length[A];
For[j = 1, j <= n, j++, If[Length[A[[j]]] > 0, AA = Append[AA, A[[j]]]]]
w2[k_, k2_] := x2[t1, k] - x2c[t2, k, k2] + y2[t1, k] - y2c[t2, k, k2];
w1[k_, mx_] := L - x2[t1, k] - y2[t1, k] + mx;
m = Length[AA];
For[j = 1, j <= m, j++,
 mx = 0; kk = 1; kk2 = 1; P = Length[AA[[j]]];
 For[p = 1, p <= P, p++,
  ww2 = w2[AA[[j, p, 1]], AA[[j, p, 2]]];
  If[mx < ww2, mx = ww2; kk = AA[[j, p, 1]]; kk2 = AA[[j, p, 2]]]];
 F = Append[F, {kk, kk2, mx, w1[kk, mx]}]]
Print[F]
Print[AA]
```

Допустимі пари $(K_1;K_2)$:

```
{{23, 0, 6.35277, 28.9718}, {24, 1, 6.67742, 29.2918}, {25, 2, 6.95309, 29.5627}, {26, 3, 7.19911, 29.8041},
 {27, 4, 7.42571, 30.026}, {28, 5, 7.63879, 30.2344}, {29, 6, 7.842, 30.4329}, {30, 7, 8.03774, 30.624},
 {31, 9, 8.74803, 31.3296}, {32, 10, 8.93778, 31.5147}, {33, 11, 9.12307, 31.6953}, {34, 12, 9.30461, 31.8721},
 {35, 13, 9.48298, 32.0458}, {36, 14, 9.65863, 32.2168}, {37, 15, 9.83192, 32.3854},
 {38, 17, 10.5746, 33.1234}, {39, 18, 10.7437, 33.2878}, {40, 19, 10.9111, 33.4505},
 {41, 20, 11.077, 33.6117}, {42, 21, 11.2415, 33.7715}, {43, 22, 11.4047, 33.9301}, {44, 23, 11.5669, 34.0876},
 {45, 25, 12.3133, 34.8293}, {46, 26, 12.4718, 34.9831}, {47, 27, 12.6295, 35.1361}, {48, 28, 12.7864, 35.2884}}
```

```
{{{23, 0}}, {{24, 0}, {24, 1}}, {{25, 0}, {25, 1}, {25, 2}}, {{26, 0}, {26, 1}, {26, 2}, {26, 3}},
 {{27, 0}, {27, 1}, {27, 2}, {27, 3}, {27, 4}}, {{28, 0}, {28, 1}, {28, 2}, {28, 3}, {28, 4}, {28, 5}},
 {{29, 0}, {29, 1}, {29, 2}, {29, 3}, {29, 4}, {29, 5}, {29, 6}},
 {{30, 0}, {30, 1}, {30, 2}, {30, 3}, {30, 4}, {30, 5}, {30, 6}, {30, 7}},
 {{31, 0}, {31, 1}, {31, 2}, {31, 3}, {31, 4}, {31, 5}, {31, 6}, {31, 7}, {31, 8}, {31, 9}},
 {{32, 0}, {32, 1}, {32, 2}, {32, 3}, {32, 4}, {32, 5}, {32, 6}, {32, 7}, {32, 8}, {32, 9}, {32, 10}},
 {{33, 0}, {33, 1}, {33, 2}, {33, 3}, {33, 4}, {33, 5}, {33, 6}, {33, 7}, {33, 8}, {33, 9}, {33, 10}, {33, 11}},
 {{34, 0}, {34, 1}, {34, 2}, {34, 3}, {34, 4}, {34, 5}, {34, 6}, {34, 7}, {34, 8},
  {34, 9}, {34, 10}, {34, 11}, {34, 12}}, {{35, 0}, {35, 1}, {35, 2}, {35, 3}, {35, 4},
  {35, 5}, {35, 6}, {35, 7}, {35, 8}, {35, 9}, {35, 10}, {35, 11}, {35, 12}, {35, 13}},
 {{36, 0}, {36, 1}, {36, 2}, {36, 3}, {36, 4}, {36, 5}, {36, 6}, {36, 7}, {36, 8}, {36, 9}, {36, 10},
  {36, 11}, {36, 12}, {36, 13}, {36, 14}}, {{37, 0}, {37, 1}, {37, 2}, {37, 3}, {37, 4}, {37, 5},
  {37, 6}, {37, 7}, {37, 8}, {37, 9}, {37, 10}, {37, 11}, {37, 12}, {37, 13}, {37, 14}, {37, 15}},
 {{38, 0}, {38, 1}, {38, 2}, {38, 3}, {38, 4}, {38, 5}, {38, 6}, {38, 7}, {38, 8}, {38, 9},
 {38, 10}, {38, 11}, {38, 12}, {38, 13}, {38, 14}, {38, 15}, {38, 16}, {38, 17}},
{{39, 0}, {39, 1}, {39, 2}, {39, 3}, {39, 4}, {39, 5}, {39, 6}, {39, 7}, {39, 8}, {39, 9},
 {39, 10}, {39, 11}, {39, 12}, {39, 13}, {39, 14}, {39, 15}, {39, 16}, {39, 17}, {39, 18}},
{{40, 0}, {40, 1}, {40, 2}, {40, 3}, {40, 4}, {40, 5}, {40, 6}, {40, 7}, {40, 8}, {40, 9}, {40, 10},
 {40, 11}, {40, 12}, {40, 13}, {40, 14}, {40, 15}, {40, 16}, {40, 17}, {40, 18}, {40, 19}},
{{41, 0}, {41, 1}, {41, 2}, {41, 3}, {41, 4}, {41, 5}, {41, 6}, {41, 7}, {41, 8}, {41, 9}, {41, 10},
 {41, 11}, {41, 12}, {41, 13}, {41, 14}, {41, 15}, {41, 16}, {41, 17}, {41, 18}, {41, 19}, {41, 20}},
{{42, 0}, {42, 1}, {42, 2}, {42, 3}, {42, 4}, {42, 5}, {42, 6}, {42, 7}, {42, 8}, {42, 9}, {42, 10},
 {42, 11}, {42, 12}, {42, 13}, {42, 14}, {42, 15}, {42, 16}, {42, 17}, {42, 18}, {42, 19}, {42, 20}, {42, 21}},
{{43, 0}, {43, 1}, {43, 2}, {43, 3}, {43, 4}, {43, 5}, {43, 6}, {43, 7}, {43, 8}, {43, 9}, {43, 10}, {43, 11},
 {43, 12}, {43, 13}, {43, 14}, {43, 15}, {43, 16}, {43, 17}, {43, 18}, {43, 19}, {43, 20}, {43, 21}, {43, 22}},
{{44, 0}, {44, 1}, {44, 2}, {44, 3}, {44, 4}, {44, 5}, {44, 6}, {44, 7}, {44, 8}, {44, 9}, {44, 10},
 {44, 11}, {44, 12}, {44, 13}, {44, 14}, {44, 15}, {44, 16}, {44, 17}, {44, 18}, {44, 19},
 {44, 20}, {44, 21}, {44, 22}, {44, 23}}, {{45, 1}, {45, 2}, {45, 3}, {45, 4}, {45, 5}, {45, 6},
 {45, 7}, {45, 8}, {45, 9}, {45, 10}, {45, 11}, {45, 12}, {45, 13}, {45, 14}, {45, 15}, {45, 16},
 {45, 17}, {45, 18}, {45, 19}, {45, 20}, {45, 21}, {45, 22}, {45, 23}, {45, 24}, {45, 25}},
{{46, 3}, {46, 4}, {46, 5}, {46, 6}, {46, 7}, {46, 8}, {46, 9}, {46, 10}, {46, 11}, {46, 12}, {46, 13},
 {46, 14}, {46, 15}, {46, 16}, {46, 17}, {46, 18}, {46, 19}, {46, 20}, {46, 21}, {46, 22}, {46, 23},
 {46, 24}, {46, 25}, {46, 26}}, {{47, 4}, {47, 5}, {47, 6}, {47, 7}, {47, 8}, {47, 9}, {47, 10}, {47, 11},
 {47, 12}, {47, 13}, {47, 14}, {47, 15}, {47, 16}, {47, 17}, {47, 18}, {47, 19}, {47, 20}, {47, 21},
 {47, 22}, {47, 23}, {47, 24}, {47, 25}, {47, 26}, {47, 27}}, {{48, 5}, {48, 6}, {48, 7}, {48, 8},
{48, 9}, {48, 10}, {48, 11}, {48, 12}, {48, 13}, {48, 14}, {48, 15}, {48, 16}, {48, 17}, {48, 18},
{48, 19}, {48, 20}, {48, 21}, {48, 22}, {48, 23}, {48, 24}, {48, 25}, {48, 26}, {48, 27}, {48, 28}}}
```

Четвірки $(K_1;K_2(\text{оптимальне});W_2(K_1);w_1(K_1))$:

```
{{23, 0, 6.35277, 28.9718}, {24, 1, 6.67742, 29.2918},
 {25, 2, 6.95309, 29.5627}, {26, 3, 7.19911, 29.8041}, {27, 4, 7.42571, 30.026},
 {28, 5, 7.63879, 30.2344}, {29, 6, 7.842, 30.4329}, {30, 7, 8.03774, 30.624},
 {31, 9, 8.74803, 31.3296}, {32, 10, 8.93778, 31.5147}, {33, 11, 9.12307, 31.6953},
 {34, 12, 9.30461, 31.8721}, {35, 13, 9.48298, 32.0458}, {36, 14, 9.65863, 32.2168},
 {37, 15, 9.83192, 32.3854}, {38, 17, 10.5746, 33.1234}, {39, 18, 10.7437, 33.2878},
 {40, 19, 10.9111, 33.4505}, {41, 20, 11.077, 33.6117}, {42, 21, 11.2415, 33.7715},
 {43, 22, 11.4047, 33.9301}, {44, 23, 11.5669, 34.0876}, {45, 25, 12.3133, 34.8293},
 {46, 26, 12.4718, 34.9831}, {47, 27, 12.6295, 35.1361}, {48, 28, 12.7864, 35.2884}}
```

Наводимо код для друку шестірок $(K_1; K_2(\text{оптимальне}); \hat{x}_1; \hat{y}_1; \hat{x}_2; \hat{y}_2)$:

```
Q = Length[F];
For[q = 1, q <= Q, q++, Print[F[[q, 1]], "   ", F[[q, 2]], "   ", x1c[t2, F[[q, 1]], F[[q, 2]]],
  "   ", y1c[t2, F[[q, 1]], F[[q, 2]]], "   ", x2c[t2, F[[q, 1]], F[[q, 2]]], "   ",
  y2c[t2, F[[q, 1]], F[[q, 2]]]]]
23  0   0.0767012   25.9596  52.3166  8.7116
24  1   0.204879    25.8375  51.8248  8.8834
25  2   0.334989    25.6973  51.3188  9.11846
26  3   0.466445    25.5446  50.8035  9.39245
27  4   0.598877    25.3827  50.2819  9.69211
28  5   0.732038    25.2139  49.756   10.0096
29  6   0.865759    25.0399  49.2272  10.3399
30  7   0.999918    24.8618  48.6962  10.6798
31  9   0.121137    25.7581  48.2309  10.4395
32  10  0.256611    25.5719  47.6927  10.7927
33  11  0.392238    25.3837  47.1546  11.1502
34  12  0.527992    25.1939  46.6166  11.5112
35  13  0.663854    25.0028  46.0789  11.8753
36  14  0.799807    24.8104  45.5415  12.2417
37  15  0.935838    24.6171  45.0043  12.6103
38  17  0.0635359   25.492   44.5056  12.371
39  18  0.199951    25.2959  43.9689  12.7433
40  19  0.336395    25.0993  43.4327  13.1168
41  20  0.472865    24.9023  42.8969  13.4915
42  21  0.609359    24.7047  42.3615  13.8671
43  22  0.745873    24.5068  41.8264  14.2435
44  23  0.882405    24.3086  41.2917  14.6207
45  25  0.0130729   25.1745  40.7958  14.3749
46  26  0.149749    24.975   40.2629  14.754
47  27  0.286432    24.7752  39.7302  15.1336
48  28  0.423119    24.5753  39.1979  15.5137
```

Тепер з отриманих значень $w_1(K_1)$ обираємо найбільше. Значення K_1, що відповідає найбільшому з отриманих $w_1(K_1)$, є оптимальним числом бойових одиниць сторони 1, яке потрібно розподілити на першу ділянку в початковий момент часу. Значення K_2, що відповідає оптимальному K_1, є теж оптимальним числом бойових одиниць, яке потрібно перекинути з першої ділянки на другу в момент часу t_1. Значення $W_1 = w_1(K_1)$, округлене до натурального, де K_1 оптимальне, і є найбільші втрати сторони 2.

Висновки до прикладу 1:

1. Найбільші втрати сторони 2 на момент часу $t_2 = 0,3$ год дорівнюють приблизно 35 бойових одиниць, при цьому в початковий момент часу потрібно розподілити для сторони 1 на першу ділянку 48 бойових одиниць, а на другу – 12 бойових одиниць, а потім в момент часу $t_1 = 0,2$ год потрібно з першої ділянки на другу перекинути приблизно 28 одиниць з 34 (що залишились неушкодженими).

2. Зауважимо, що переваги в кількості бойових одиниць на початку бою були у сторони 2 на 30 одиниць (а саме: 60 у першої сторони, 90 у другої сторони), а на момент часу $t_2 = 0,3$ год стороною 1 і стороною 2 знищено однаково приблизно 35 одиниць. Тобто на початку бою переваги були у другої сторони, але за рахунок оптимального розподілу бойових одиниць першої сторони по ділянкам зіткнення в початковий момент часу і через 0,2 год в результаті через 0,3 год першою стороною знищено бойових одиниць стільки, скільки і другою.

Розглянемо приклад 2 в більш короткому формулюванні. Нехай

$$K = 55, \quad L_1 = 16, \quad L - L_1 = 20,$$

$$\alpha_1 = 2,6 \frac{постр}{год}, \quad \alpha_2 = 1,4 \frac{постр}{год}, \quad \alpha_2' = 2,2 \frac{постр}{год},$$

$$t_1 = 0,2 год, \quad t_2 = 0,3 год.$$

Наводимо коротко тільки результати, а саме допустимі значення параметра K_1 і відповідні кількості неушкоджених бойових одиниць обох сторін в момент часу t_1: $(x_1; x_2; y_1; y_2)$.

Далі отримано, що виключаються всі K_1, крім 25, і виводиться

$$(K_1; K_2(\text{оптимальне}); \hat{x}_1; \hat{y}_1; \hat{x}_2; \hat{y}_2).$$

Маємо єдину четвірку

$$\left(K_1; K_2(\text{оптимальне}); W_2(K_1); w_1(K_1)\right).$$

```
{K, L, L1, a1, a2, a2p} = {55, 36, 16, 2.6, 1.4, 2.2};
t1 = 0.2;
For[k = 14, k < 33, k++, Print[k, "    ", {x1[t1, k], x2[t1, k], y1[t1, k], y2[t1, k]}]]
14    {10.4421, 9.72105, 36.6411, 0.189604}
15    {11.5158, 9.18834, 35.5245, 0.729662}
16    {12.5895, 8.65563, 34.4079, 1.26972}
17    {13.6632, 8.12292, 33.2913, 1.80978}
18    {14.7369, 7.59021, 32.1747, 2.34983}
19    {15.8106, 7.0575, 31.0581, 2.88989}
20    {16.8842, 6.52478, 29.9415, 3.42995}
21    {17.9579, 5.99207, 28.8249, 3.97001}
22    {19.0316, 5.45936, 27.7083, 4.51006}
23    {20.1053, 4.92665, 26.5917, 5.05012}
24    {21.179, 4.39394, 25.4751, 5.59018}
25    {22.2527, 3.86123, 24.3585, 6.13024}
26    {23.3264, 3.32852, 23.2419, 6.67029}
27    {24.4001, 2.79581, 22.1253, 7.21035}
28    {25.4737, 2.2631, 21.0087, 7.75041}
29    {26.5474, 1.73039, 19.8921, 8.29047}
30    {27.6211, 1.19768, 18.7755, 8.83052}
31    {28.6948, 0.664965, 17.6589, 9.37058}
32    {29.7685, 0.132254, 16.5423, 9.91064}

Q = Length[F];
For[q = 1, q <= Q, q++, Print[F[[q, 1]], "    ", F[[q, 2]], "    ",
  x1c[t2, F[[q, 1]], F[[q, 2]]], "    ", y1c[t2, F[[q, 1]], F[[q, 2]]], "    ",
  x2c[t2, F[[q, 1]], F[[q, 2]]], "    ", y2c[t2, F[[q, 1]], F[[q, 2]]]]]
25   1   21.0795    24.758   0.00516657   0.0252864

Print[F]
{{25, 1, 9.96101, 35.9695}}
```

Висновки до прикладу 2:

1. Допустимим значенням є тільки одне значення K_1, а саме $K_1 = 25$.

2. Найбільші втрати сторони 2 на момент часу $t_2 = 0,3$ год дорівнюють приблизно 36 бойових одиниць, при цьому в початковий момент часу потрібно розподілити для сторони 1 на першу ділянку 25 бойових одиниць, а на другу – 30 бойових одиниць, а потім в момент часу $t_1 = 0,2$ год потрібно з першої ділянки на другу перекинути 1 одиницю з 22 одиниць, що залишились неушкодженими.

3. Те, що в масиві F отримано єдину четвірку (тобто допустимим є тільки одне значення параметру K_1, воно і є оптимальним) пояснюється тим, що час t_2 співпадає з часом закінчення бою (повним знищенням сторони 2).

Висновки

В роботі розроблена методика математичного моделювання бойових дій на двох ділянках зіткнення. При цьому одна зі сторін (активна) має можливість в два задані моменти часу перекидати свої бойові ресурси з одного поля бою на інше. Запропонована методика базується на поєднанні застосування диференціальних рівнянь Ланчестера, методу динамічного програмування і пакета Wolfram Mathematica. За допомогою цієї методики встановлено, як визначати допустимі значення двох параметрів, що є відповідно кількостями бойових одиниць, які має перша сторона розподілити в початковий момент часу на першу ділянку зіткнення і перекинути в наступний момент часу з першої ділянки на другу для досягнення максимальних втрат другої сторони. Чисельні експерименти засвідчують, що не маючи перевагу на початку бою на своєму боці, можна за рахунок оптимального розподілу бойових одиниць нанести максимальні втрати супротивнику, по-друге, за рахунок цього можна в певний момент часу завершити бій повним його знищенням.

Список літератури

1. Фурсенко О.К., Черновол Н.М, Антоненко Г.М. Математичне моделювання бойових дій на двох ділянках зіткнення з можливістю перерозподілу бойових ресурсів. *Системи обробки інформації.* 2022. Випуск 4(171). С. 76-81. DOI: https://doi.org/10.30748/soi.2022.171.08

2. Вентцель Е.С. Исследование операций: монография. Москва: Советское радио, 1972. 552 с.

3. Вентцель Е.С. Введение в исследование операций: монография. Москва: Советское радио, 1964. 388 с.

4. Wolfram S. The Mathematica book, 5th ed. Champaign: Wolfram Media, 2003. 1488 p.

5. Abell M.L., Braselton J.P. Differential Equation with Mathematica, 3rd ed. Elsevier Academic Press, 2004. 890 p.

6. Вовчук С.В., Удодова О.І. Модель А високоорганізованого бою в системі Mathematica. *Modern research in world science*: зб. тез доп. XI міжнар. наук.-практ. конф., Львів. 2023. С. 513-514.

7. Машкін О.О. Особливості чисельного вирішення диференціальних рівнянь моделей ланчестерського типу у стохастичній постановці. *Системи обробки інформації.* 2020. № 1(160). С. 67-72. DOI: https:// doi.org/ 10.30748/ soi.2020.160.08

8. Чуев В.Ю., Дубограй И.В. “Смешанные” стохастические модели двусторонних боевых действий при упреждающем ударе одной из сторон. *Математическое моделирование и численные методы* 2017. № 2. С. 107-123.

9. Чуев В.Ю., Дубограй И.В., Дьякова Л.Н. “Смешанные” вероятностные модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы.* 2017. № 1. С. 91-101. DOI: https://doi 10.18698/2309-3684-2017-1-91101

10. Чуєв В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки».* 2011. С. 223-232.

11. Грабчак В.І., Супрун В.М., Заскока А.М. Аналітична модель бою між протидіючими угрупованнями. *Військово-технічний збірник.* 2012. № 1(6). С. 110-120.

12. Atkinson M.P., Kress M., MacKay N.J. Targeting, deployment, and loss-tolerance in lanchester engagements. *Operations Research.* 2021. № 69(1). pp. 71-81. DOI: https:// doi.org/10.1287/opre.2020.2022

13. Фурсенко О.К., Черновол Н.М, Антоненко Г.М. Моделювання оптимального розподілу бойових ресурсів по різним ділянкам зіткнення з використанням системи Wolfram Mathematika. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ:* зб. тез доп. міжнар. наук.-техн. конф. Львівської національної академії Сухопутних Військ імені Петра Сагайдачного. Львів, 17-18 травня 2023. С. 231.

References

1. Fursenko O.K., Chernovol N.M. and Antonenko H.M. (2022), “Matematychne modelyuvannya boyovykh diy na dvokh dilyankakh zitknennya z mozhlyvistyu pererozpodilu boyovykh resursiv” [Mathematical simulation of warfare at two clash points with the possibility of redistribution of combat resources], *Information processing systems,* Issue 4 (171), pp.76-81. DOI: https://doi.org/10.30748/soi.2022.171.08 [in Ukrainian].

2. Wentzel E.S. (1972), “Issledovanie operatsiy: monografiya” [Operations research], *Soviet radio, Moscow,* 552 p. [in Russian].

3. Wentzel, E.S. (1964), “Vvedenie v issledovanie operatsiy: monografiya” [Introduction to operations research], *Soviet radio, Moscow,* 388 p. [in Russian].

4. Wolfram S. (2003), The Mathematica book, 5th ed. *Wolfram Media., Champaign,* 1488 p.

5. Abell M.L. and Braselton J.P. (2004), Differential Equation with Mathematica, 3rd ed. *Elsevier Academic Press,* 890 p.

6. Vovchuk S.V. and Udodova O.I. (2023), “Model′ A vysokoorhanizovanoho boyu v systemi Mathematica” [Model A of highly organized combat in the Mathematica system], Modern research in world science: coll. theses add. XIth International science and practice conference, Lviv. pp. 513-514.

7. Mashkin O.O. (2020), “Osoblyvosti chyseljnogho vyrishennja dyferencialjnykh rivnjanj modelej lanchestersjkogho typu u stokhastychnij postanovci” [Features of numerical solution of diffrencial equations of lanchester-type model in stochastic production], *Information processing systems*, No. 1(160), pp. 67-72. DOI: https://doi.org/10.30748/soi.2020.160.08 [in Ukrainian].

8. Chuev V.Yu. and Dubogray I.V. (2017) ““Smeshannyye” stokhasticheskiye modeli dvustoronnikh boyevykh deystviy pri uprezhdayushchem udare odnoy iz storon” [“Mixed” stochastic models of bilateral combat operations in the event of a preemptive strike by one of the parties], *Mathematical modeling and numerical methods,* No. 2 , pp. 107- 123. [in Russian].

9. Chuev V.Yu., Dubograi I.V. and Dyakova L.N. (2017), ““Smeshannyie” veroyatnostnyie modeli dvustoronnih boevyih deystviy mnogochislennyih gruppirovok” [“Mixed” probabilistic models of bilateral military operations of numerous groups], *Mathematical modeling and numerical methods*, No. 1, pp. 91- 101. DOI: https://doi 10.18698/2309-3684-2017-1-91101 [in Russian].

10. Chuev V.Yu. (2011), “Veroyatnostnaya model boya mnogochislennyih gruppirovok” [Probabilistic model of battle of numerous groups], *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Seies "Natural Sciences",* pp. 223-232. [in Russian].

11. Hrabchak, V.I., Suprun, V.M. and Zaskoka, A.M. (2012), “Analitychna modelj boju mizh protydijuchymy ughrupovannjamy” [Analitical combat model between opposing forces] *Military technical collection,* No. 1(6), pp. 110-120. [in Ukrainian].

12. Atkinson M.P., Kress M. and MacKay N.J. (2021), Targeting, deployment, and loss-tolerance in lanchester engagements. *Operations Research*, No. 69(1), pp. 71-81. DOI: https://doi.org/10.1287/opre.2020.2022

13. Fursenko O.K., Chernovol N.M. and Antonenko H.M. (2023), “Modelyuvannya optymal′noho rozpodilu boyovykh resursiv po riznym dilyankam zitknennya z vykorystannyam systemy Wolfram Mathematika” [Modeling the optimal distribution of combat resources on different areas of the collision using the Wolfram Mathematika system], *Prospects for the development of weapons and military equipment of the Ground Forces: coll. theses add. international science and technology conf. of Hetman Petro Sahaidachnyi National Ground Forces Academy. Lviv.* p. 231.

MATHEMATICAL SIMULATION OF COMBAT ACTIONS ON TWO ENCOUNTERS USING DYNAMIC PROGRAMMING AND WOLFRAM MATHEMATICA PACKAGE

O. Fursenko, N. Chernovol, H. Antonenko

The work is devoted to the important task of modeling combat operations at various areas of the conflict with the possibility of redistribution of combat resources during the battle. The problem of dynamic programming is formulated with the objective function as a function of the enemy's losses. This function is determined using the system of differential equations of Lanchester in the conditions of "highly organized" combat. In the work, using the Wolfram Mathematica package, a computer implementation of the solution to the problem of finding the optimal number of combat units, which should be distributed by one of the parties at the initial moment of time to the first site of the collision and then transferred from of the first site to the second at some subsequent moment of time with the aim of inflicting maximum losses on the other side (the enemy) at a certain moment of time. Examples of this implementation are given. Conclusions are made based on the sample solutions tables. Firstly, the side having a disadvantage in combat units at the beginning of the battle can destroy a significant part of the enemy due to the optimal distribution of combat units. Secondly, due to the optimal distribution of combat units, it is possible to end the battle by completely destroying the enemy at a certain point of time. The examples have shown the ability of the computers to predict the outcome of the battle at two points of contact. The computer program can be organized to destroy as much of the enemy's armory as possible before a certain moment of time, or to destroy it completely at a certain moment of time. The results of this work will be used to solve the more general problem of redistributing combat resources across different areas of the conflict (more than two) at different points in time (more than two). In addition, a similar approach can be used when the battle between the parties is "poorly organized" or is a battle with reinforcements, etc.

Keywords: *equations of battle dynamics, target function as a function of losses, areas of collision, redistribution of combat units, effective rate of fire, maximization of losses, admissibility of redistribution parameters.*