

УДК 623.546

DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.30.2024.49-56>

П.П. Ткачук, Л.Д. Величко, М.І. Войтович, М.І. Сорокатий

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів**Article history: Received 08 February 2024; Revised 15 February 2024; Accepted 14 March 2024*

## ВРАХУВАННЯ ВИСОТИ ЛЕТУ СНАРЯДА В УМОВІ ЗАВЕРШЕННЯ ЙОГО РУХУ З ПІДЗВУКОВОЮ ШВИДКІСТЮ

Одним з чинників, який впливає на динаміку снаряда є лобовий опір повітря. Отримати аналітичним методом його функціональну залежність від швидкості снаряда, густини та температури повітря, атмосферного тиску, геометричних параметрів снаряда та інших факторів доволі проблематично. Їх сумарний вплив на рух снаряда можна визначити з певною точністю, розв'язуючи відповідну обернену задачу. На основі експериментальних досліджень встановлено, що поведінка величини сили лобового опору повітря суттєво залежить від того чи снаряд рухається з надзвуковою, підзвуковою чи дозвуковою швидкостями. Полігонні дослідження встановлюють дискретну залежність між кутом прицілювання і дальністю стрільби при певних значеннях: типу снаряда, його маси, початкової швидкості снаряда, температури повітря, атмосферного тиску.

На основі цих тверджень авторами розроблена методика визначення функціональної залежності сили лобового опору повітря від швидкості та маси снаряда, атмосферного тиску, температури повітря і деяких інших чинників базуючись на розв'язуванні оберненої задачі динаміки. Під час руху снаряда в повітрі має місце почергова зміна величин швидкості. Якщо початкова швидкість снаряда надзвукова, то снаряд буде рухатись спочатку з надзвуковою спадною швидкістю, потім підзвуковою та дозвуковою спадними швидкостями. Однак при великих кутах прицілювання, на завершальному етапі руху снаряд може рухатись зі зростаючою швидкістю. Функціональну залежність сили лобового опору визначають для кожного етапу зокрема. Проте особливістю руху снаряда в повітрі, коли його швидкість починає зростати, є виникнення сили бічного тиску повітря на снаряд. Остання скерована перпендикулярно до швидкості снаряда і вниз. Величина сили бічного тиску залежить від величини і напрямку швидкості снаряда, його висоти лету та деяких інших чинників.

Розроблена математична модель була застосована до визначення параметрів руху снаряда, випущеного з гаубиці М777А2 заряд 3Н. Проведено порівняння кінематичних параметрів руху снаряда, отриманих на основі запропонованої математичної моделі з відповідними значеннями, вказаними у таблицях стрільби. Встановлено, що при кутах прицілювання до 45° теоретичні результати і відповідні табличні значення майже збігаються. При більших кутах прицілювання мають місце певні розбіжності між теоретичними результатами та табличними значеннями, оскільки автори враховували силу бічного тиску повітря на снаряд.

**Ключові слова:** зовнішня балістика, динаміка снаряда в повітрі, сила лобового опору повітря, надзвукова швидкість снаряда.

### Постановка проблеми

Дослідження руху снаряда в повітрі пов'язане з певними труднощами. Снаряд, випущений з гармати, гаубиці здійснює складний рух у повітрі. Він, рухаючись у просторі криволінійною траєкторією, здійснює обертання навколо своєї осі симетрії та динамічного кута рівноваги. Повітря біля поверхні снаряда рухається турбулентно. У процесі лету снаряда густина повітря змінюється, оскільки остання суттєво залежить від його температури. Силовий вплив кожного зокрема з цих факторів на динаміку снаряда на сьогодні представити в аналітичному вигляді доволі проблематично.

Тому здійснюється визначення інтегрального впливу цих факторів на динаміку снаряда в повітрі. Для цього використовують метод оберненої задачі. В результаті проведених полігонних досліджень встановлюють дискретну залежність між кутом прицілювання та дальністю лету снаряда. Знаючи ці величини, значення маси снаряда та його початкової швидкості, температури повітря, атмосферного тиску, напрямку і величину швидкості вітру визначають величину сили лобового опору повітря.

На основі полігонних досліджень сформовані таблиці стрільби для гармат і гаубиць при стандартних умовах та величини поправок, що визначені аналітичними методами та обумовлені нестандартними умовами стрільби.

Експериментальні та полігонні дослідження дозволяють виявити суттєві особливості руху снаряда в повітрі. Проте вони, переважно, встановлюють вплив одного з факторів на рух снаряда та їх проведення вимагає значних фінансових затрат.

Отже, для дослідження особливостей руху снаряда в повітрі необхідне поєднання теоретичних та експериментальних методів.

### Аналіз досліджень і публікацій

Практика застосування артилерійського озброєння вимагає проведення досліджень проблем зовнішньої балістики. Тому цій тематиці присвячена значна кількість наукових праць. У монографіях [1-2] детально розглянута історіографія робіт, присвячених питанням зовнішньої балістики, і висвітлено теоретичні та експериментальні напрацювання на сьогодні у вивченні проблем зовнішньої балістики. Як у монографіях, так і в інших наукових працях [3-9], присвячених зовнішній балістиці, сила лобового опору повітря описується залежностями

$$R = \frac{\rho V^2}{2} \frac{\pi d^2}{4} i c_x \left( \frac{V}{V_s} \right), \quad (1)$$

або

$$R = \frac{\rho V^2}{2} \frac{\pi d^2}{4} C_D, \quad (2)$$

де  $R$  – сила лобового опору повітря,  $\rho$  – густина повітря,  $V$  – швидкість снаряда,  $d$  – калібр снаряда,  $V_s$  – швидкість звуку в повітрі,  $i$  – коефіцієнт форми снаряда,  $c_x \left( \frac{V}{V_s} \right)$  – еталонна функція лобового опору,

$C_D$  – коефіцієнт сили опору. Величину  $\frac{\rho V^2}{2}$  називають динамічним тиском.

Значення коефіцієнта форми снаряда  $i$  підбирається, враховуючи геометричні розміри його та еталонних снарядів. Еталонні функції лобового опору повітря визначали проведенням експериментальних досліджень, що встановлюють дискретну залежність між значеннями числа Маха і коефіцієнтами сили опору.

У формулах (1) і (2) вказані функціональні залежності сили лобового опору повітря від квадрата швидкості снаряда. Однак у дійсності сила лобового опору тільки інколи пропорціональна квадрату швидкості снаряда. Тому це твердження накладає певні обмеження на результати теоретичних досліджень, тим самим виключається область досліджень, де сила

лобового опору не пропорціональна квадрату швидкості. Значення коефіцієнтів форми снаряда і сили опору при вивченні динаміки руху конкретних гармат (гаубиць) та снарядів підбирають, щоб досягти певної розбіжності між результатами теоретичних і полігонних досліджень.

Отже, використання залежностей (1) і (2) при дослідженнях задач зовнішньої балістики не повною мірою відображає фізичну сторону динаміки снаряда в повітрі. Однак використання формул (1) і (2) дозволяє з певною точністю визначати кінематичні параметри руху снаряда під час його руху. Таблиці стрільби сформовані при ідеальних умовах стрільби. Оскільки стрільба переважно, ведеться при неідеальних умовах, тому для формування таблиць стрільби необхідне визначення диференціальних коефіцієнтів (величин поправок), які реалізують проведенням експериментальних та аналітичних досліджень.

### Формулювання мети статті

Вагому роль у динаміці снаряда відіграє вплив повітря. Одним з його силових впливів є сила лобового опору повітря. Остання суттєво залежить від характеру швидкості снаряда. Тобто величина сили лобового опору по різному залежить від того, чи снаряд рухається з надзвуковою, підзвуковою, дозвуковою спадними або зростаючими швидкостями.

Якщо початкова швидкість снаряда надзвукова, то снаряд буде рухатись у повітрі почергово з надзвуковою, підзвуковою та дозвуковою спадними швидкостями в залежності від дальності стрільби. Однак на завершальному етапі руху снаряда може бути, що величина проекції його ваги на напрямок швидкості буде більшою від сили лобового опору повітря. У цьому випадку снаряд почне рухатись зі зростаючою швидкістю. Проведені авторами багаторазові численні дослідження дають можливість стверджувати, що в цьому випадку, крім сили лобового опору повітря, виникає сила тиску повітря на бічну поверхню снаряда. Автори вважають, що вона виникає внаслідок нерівномірного розподілу величин швидкості звуку в повітрі по висоті.

Метою статті є удосконалення математичної моделі руху снаряда в повітрі з врахуванням сили лобового опору повітря і сили тиску повітря на бічну поверхню снаряда, якщо швидкість снаряда зростає.

### Виклад основного матеріалу

У роботі [10] описана математична модель дослідження динаміки снаряда в повітрі. Пропонується функціональну залежність величини сили лобового опору повітря рухові снаряда від його швидкості описувати залежністю

$$R(t) = c_x \cdot \rho_a \cdot s_x \cdot (V(t))^{2+\gamma_i} \left( \frac{V(t)}{V_s(t)} \right)^{\beta_i} \quad (3)$$

і значення коефіцієнтів  $\gamma_i (i=1,2,3)$  та  $\beta_i (i=1,2,3)$  є різними при надзвуковій ( $i=1$ ), підзвуковій ( $i=2$ ) та дозвуковій ( $i=3$ ) спадних швидкостях.

У формулі (3) мають місце позначення:  $c_x$  – коефіцієнт який враховує аеродинамічність форми снаряда при його повздовжньому обтіканні повітрям і пропорційності;  $\rho_a$  – густина повітря;  $s_x$  – максимальна площа поперечного перерізу снаряда.

Розміщується початок системи координат  $O_{хуз}$  в точці розташування зброї. Вісь  $Ox$  лежить у горизонтальній площині зброї та скеровується в напрямку цілі, вісь  $Oz$  – напрямляється від центру Землі вгору, а вісь  $Oy$  є перпендикулярною до площини  $Oxz$ , утворюючи праву систему координат.

У випадку знехтуванням дії вітру на снаряд функціональна залежність величини сили лобового опору повітря від швидкості снаряда та інших чинників описується формулою

$$R(t) = \frac{c_x s_x \mu_a \cdot 101325}{R_{um}} \left( 1 - \frac{6,5(z+zp)}{288000} \right)^{5,255} \times \frac{(V(t))^{2+\gamma_i+\beta_i}}{\left( \frac{k_a R_{um}}{\mu_a} \right)^{0,5\beta_i} (TK - 0,006328 z(t))^{1+0,5\beta_i}}, \quad (4)$$

де  $\mu_a = 28,96 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$  – умовна молярна маса повітря,

$R_{um} = 8314 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$  – універсальна газова стала,

$TK$  – абсолютна температура повітря в точці розташування зброї,  $k_a = 1,4$  – показник адиабати для повітря,  $zp = 111,54 \text{ м}$  – обумовлена атмосферним тиском 750 мм рт. ст.

#### Приклад.

Проведемо дослідження руху снаряда Projectiles, HE, M795 і M795IM; Fuze, PD, M739A1, Charge 3H, випущеного з гаубиці M777A2. Під час проведення досліджень брались наступні значення параметрів:  $m = 46,947 \text{ кг}$ ,  $s_x = \pi \cdot 0,078^2 \text{ м}^2$  і  $c_x = 0,35$ .

Оскільки початкова швидкість снаряда  $V_0 = 547 \text{ м/с}$ , то він при кутах прицілювання  $0 \text{ mil} < \alpha \leq 1251 \text{ mil}$  буде рухатись тільки з надзвуковою швидкістю. Значення коефіцієнтів у формулі (4) наступні:  $\gamma_1 = -0,1075119$  і  $\beta_1 = -0,0448637$ .

Розглядався рух снаряда під дією сили лобового опору повітря, ваги снаряда та Коріолісової сили.

Таблиця 1

Значення кінематичних параметрів руху снаряда, якщо він рухається з надзвуковою швидкістю, отримані теоретично та наведені в таблицях стрільб [11]

$\alpha_i, (i=1,53),$ <i>mil</i>	$t_{ik}, \text{с}$	$\theta_{ic}, \text{град}$	$x_{ik}, \text{м}$	$\dot{x}_{ik}, \text{м/с}$	$\dot{z}_{ik}, \text{м/с}$	$V_{ik}, \text{м/с}$	$H_i, \text{м}$	$x_{iH}, \text{м}$	$S_i, \text{м}$
$\alpha_1 = 0$	0,0	0°0'	0,0	671,0	0,0	671	0,0	0,0	0,0
$\alpha_4 = 6,9$	0,7510 (0,7)	0°24'	403,62 (400)	528,11	-3,66	528,12	0,69	203,0	403,6
$\alpha_{10} = 17,7$	1,9090 (1,9)	1°03' (1°04')	999,26 (1000)	501,20	-9,23	501,29 (502)	4,47 (4)	506,9	999,3
$\alpha_{20} = 37,6$	3,9899 (4,0)	2°23' (2°25')	1999,08 (2000)	458,68	-19,04	459,08 (459)	19,53 (20)	1027	1997
$\alpha_{30} = 60,2$	6,2766 (6,3)	4°02' (4°03')	2996,30 (3000)	419,04	-29,57	420,08 (419)	48,38 (48)	1564	2998
$\alpha_{37} = 77,8$	8,0056 (8,0)	5°26'	3695,14 (3700)	393,05	-37,39	394,82	78,77	1948	3700
$\alpha_{40} = 85,9$	8,7871 (8,8)	6°06' (6°11')	3996,41 (4000)	382,26	-40,90	384,44 (382)	94,93 (95)	2116	4003
$\alpha_{50} = 115,4$	11,5628 (11,6)	8°43' (8°46')	5000,39 (5000)	348,04	-53,19	352,08 (351)	164,6 (165)	2684	5015
$\alpha_{53} = 125,1$	12,4528 (12,4)	9°35'	5302,28 (5300)	338,26	-57,09	343,04	191,1	2859	5321

Табличні дані наведені при атмосферному тиску 760 мм рт. ст., тому при проведенні теоретичних обчислень у формулі (4)  $zp = 0 \text{ м}$ . (У цій та наступних таблицях вказані кінематичні параметри

руху снаряда для: початку і закінчення етапу; найбільших додатних та від'ємних відхилень між теоретичними та табличними [11] значеннями дальності лету снаряда; вибіркового, якому в таблиці [11] вказані кут падіння, кінцева швидкість та максимальна висота траєкторії руху снаряда).

У таблиці 1 мають місце позначення:  $\alpha_i$  – кут прицілювання;  $t_{ik}$  – тривалість лету снаряда;  $\theta_{ic}$  – кут падіння;  $x_{ik}$  – горизонтальна координата точки обнуління траєкторії руху снаряда;  $\dot{x}_{ik}$  і  $\dot{z}_{ik}$  – проєкції швидкості на відповідні осі координат у момент обнуління траєкторії;  $V_{ik}$  – кінцева швидкість снаряда;  $H_i$  – максимальна висота траєкторії;  $x_{iH}$  – горизонтальна дальність до вершини траєкторії,  $\xi$  – довжина траєкторії руху снаряда. Табличні значення параметрів руху снаряда [11] вказані в дужках.

Наявність розбіжностей між теоретичними і табличними [11] значеннями повної горизонтальної дальності лету снаряда є в межах 5 метрів. Теоретичні

результати і табличні значення тривалості лету снаряда, величини кута падіння, його кінцевої швидкості та максимальної висоти траєкторії на етапі руху снаряда з надзвуковою швидкістю тотожні.

При кутах прицілювання, більших від  $\alpha > 125,1 \text{ mil}$ , швидкість снаряда під час руху буде змінюватись з надзвукової на підзвукову. Умовою завершення етапу руху снаряда з надзвуковою швидкістю є порушення умови

$$V_I(t) > V_s I(t), \quad (5)$$

де  $V_I(t)$  і  $V_s I(t)$  – швидкості снаряда і звуку на першому етапі руху снаряда.

При кутах прицілювання  $128,4 \text{ mil} < \alpha \leq 298,0 \text{ mil}$  снаряд спочатку буде рухатись з надзвуковою швидкістю, а потім – з підзвуковою. На цьому етапі значення у формулі (4)  $\gamma_2 = -0,1967527$  і  $\beta_2 = 2,0907809$ .

Таблиця 2

**Значення кінематичних параметрів руху снаряда, якщо під час лету його швидкість змінюється з надзвуковою на підзвукову, отримані теоретично та наведені в таблицях стрільб [11]**

$\alpha_i, (i=54,94),$ <i>mil</i>	$t_{ik}, c$	$\theta_{ic}, \text{град}$	$x_{ik}, m$	$\dot{x}_{ik}, m/c$	$\dot{z}_{ik}, m/c$	$V_{ik}, m/c$	$H_i, m$	$x_{iH}, m$	$S_i, m$
$\alpha_{54} = 128,4$	12,7531 (12,7)	$9^\circ 53'$	5402,11 (5400)	335,12	-58,41	340,17	200,4	2916	5422
$\alpha_{60} = 149,1$	14,5907 (14,6)	$11^\circ 47'$ ( $11^\circ 55'$ )	5999,16 (6000)	324,58	-67,73	331,57 (329)	263,3 (264)	3263	6030
$\alpha_{69} = 183,3$	17,4847 (17,5)	$14^\circ 49'$	6898,46 (6900)	310,08	-82,03	320,75	382,1	3785	6955
$\alpha_{70} = 187,4$	17,8224 (17,8)	$15^\circ 10'$ ( $15^\circ 25'$ )	7000,23 (7000)	308,52	-83,68	319,67 (315)	397,5 (399)	3844	7061
$\alpha_{80} = 230,1$	21,2495 (21,3)	$18^\circ 49'$ ( $19^\circ 07'$ )	7999,92 (8000)	294,03	-100,18	310,63 (306)	571,4 (574)	4413	8108
$\alpha_{89} = 272,7$	24,5363 (24,6)	$22^\circ 19'$	8902,53 (8900)	281,86	-115,71	304,69	767,7	4909	9076
$\alpha_{90} = 277,6$	24,9074 (24,9)	$22^\circ 43'$ ( $23^\circ 04'$ )	9001,09 (9000)	280,57	-117,44	304,16 (301)	791,6 (795)	4962	9184
$\alpha_{94} = 298,0$	26,4382 (26,5)	$24^\circ 20'$	9400,51 (9400)	275,41	-124,57	302,27	894,0	5175	9623

Розбіжності між дальністю лету снаряда, визначених теоретично та вказаних у таблицях стрільб [11], є в межах 2,5 метра. Тривалості лету снаряда теоретичні та вказані в таблицях стрільб практично однакові. Відхилення кутів падіння снаряда, визначених теоретично та табличних, незначні. Максимальна висота лету снаряда, визначена теоретично, є менша від табличної та зі зростанням кута прицілювання різниця досягає 3 метрів. Теоретична кінцева швидкість снаряда є більша від табличної.

З умови порушення нерівності

$$V2(t) > V2(t + \Delta t), \quad (6)$$

де  $V2(t)$  – швидкість снаряда на другому етапі руху і  $\Delta t > 0$ , визначається момент часу коли завершується рух снаряда з підзвуковою швидкістю.

У результаті обчислень отримали, що завершення руху снаряда з підзвуковою швидкістю є тоді, коли його швидкість зменшуючись, досягає величини  $V_{tr} = 302,2 \frac{m}{c}$  на нульовій висоті над рівнем зброї.

Швидкість звуку в повітрі змінюється зі зміною висоти лету снаряда. Тому вважається, що завершення руху з підзвуковою швидкістю на інших висотах, визначається з порушення умови нерівності

$$V\dot{\alpha}(t) > \frac{V_{tr} \cdot V_s \dot{\alpha}(t)}{V_s}, \quad (7)$$

де  $V_s(t)$  – швидкість звуку в повітрі на певній висоті лету снаряда,  $V_s = \sqrt{\frac{k_a \cdot R_{un} \cdot TK}{\mu_a}}$  – швидкість звуку при температурі повітря  $TK$ .

При кутах прицілювання в межах  $303,2 \text{ mil} \leq \alpha_i \leq 694,4 \text{ mil}$  (дальність стрільби змінюється від 9500 до 14300 метрів) під час лету

снаряда спостерігається три етапи зміни його швидкості. На першому етапі снаряд рухається з надзвуковою швидкістю і момент завершення етапу визначається з умови (5). На другому етапі снаряд рухається з підзвуковою швидкістю і його момент завершення визначається з умови (7). На третьому етапі снаряд рухається з дозвуковою швидкістю і у формулі (4) значення параметрів  $\gamma_3 = -0,2535953$  і  $\beta_3 = 0,7777793$ .

Таблиця 3

**Значення кінематичних параметрів руху снаряда, якщо його швидкість спочатку є надзвуковою, потім підзвуковою і, нарешті, дозвуковою, отримані теоретично та наведені в таблицях стрільб [11]**

$\alpha_i, (i = \overline{95, 143}),$ <i>mil</i>	$t_{ik}, c$	$\theta_{ic}, град$	$x_{ik}, m$	$\dot{x}_{ik}, m/c$	$\dot{z}_{ik}, m/c$	$V_{ik}, m/c$	$H_i, m$	$x_{iH}, m$	$S_i, m$
$\alpha_{95} = 303,2$	26,8244 (26,9)	24°48'	9499,64 (9500)	274,59	-126,56	302,35	920,8	5228	9733
$\alpha_{100} = 330,2$	28,7960 (28,8)	26°47' (27°10')	9998,63 (10000)	270,23	-136,38	302,69 (298)	1064 (1070)	5492	10293
$\alpha_{102} = 341,4$	29,6024 (29,7)	27°36'	10198,4 (10200)	268,30	-140,25	302,75	1126	5597	10520
$\alpha_{110} = 388,9$	32,9688 (33,1)	30°57' (31°30')	10999,8 (11000)	259,96	-155,95	303,15 (297)	1401 (1409)	6017	11457
$\alpha_{120} = 455,6$	37,5757 (37,7)	35°26' (36°04')	12001,3 (12000)	248,26	-176,65	304,70 (299)	1820 (1833)	6533	12699
$\alpha_{130} = 535,2$	42,9052 (43,1)	40°26' (41°07')	13000,6 (13000)	234,57	-199,89	308,19 (302)	2367 (2383)	7039	14068
$\alpha_{140} = 644,4$	49,9033 (50,2)	46°43' (47°28')	13999,5 (14000)	216,15	-229,53	315,29 (308)	3184 (3205)	7535	15738
$\alpha_{143} = 694,4$	52,9737 (53,4)	49°23'	14301,8 (14300)	207,73	-242,26	319,13	3578	7678	16414

Розбіжності між дальністю лету снаряда, визначених теоретично та вказаних у таблицях стрільби [11], є в межах 2 метрів. Теоретичні тривалості лету снаряда є меншими від вказаних у таблицях стрільб та зі збільшенням кута прицілювання різниця зростає і досягає 0,4 секунди. Величини кутів падіння снаряда, визначених теоретично, є меншими від табличних і різниця досягає менше одного градуса. Максимальна висота лету снаряда, визначена теоретично, є менша від табличної та зі зростанням кута прицілювання різниця досягає 21 м (теоретична висота лету снаряда 3184 м, а таблична – 3205 м). Теоретична кінцева швидкість снаряда є більша від табличної.

Проведені авторами багаторазові числені дослідження руху снаряда в повітрі дозволяють стверджувати, що у випадку, коли спостерігається зростання швидкості снаряда, то виникає сила бічного тиску повітря на снаряд –  $\vec{F}_{sw}$ . Вона скерована перпендикулярно до швидкості снаряда і вниз. Досліджено, що величина сили бічного тиску залежить від висоти руху снаряда, величини і напрямку його швидкості та інших факторів.

Умовою завершення третього етапу руху снаряда є порушення нерівності

$$V3(t) > V3(t + \Delta t), \quad (8)$$

де  $V3(t)$  – швидкість снаряда на третьому етапі руху.

На четвертому етапі закон руху снаряда описується рівнянням

$$m\vec{a} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{sw}, \quad (9)$$

де  $\vec{P} = mg$  – вага снаряда,  $\vec{F}_{cor}$  – Коріолісова сила.

Сила лобового опору повітря описується формулою (4) і значення параметрів  $\gamma_4 = \gamma_3$ ,  $\beta_4 = \beta_3$ .

Отже, при кутах прицілювання  $716,7 \text{ mil} \leq \alpha_i \leq 1283,6 \text{ mil}$  під час лету снаряда його швидкість поетапно змінюється. На першому етапі снаряд рухається з надзвуковою швидкістю і його завершення описується формулою (5). На другому етапі – з підзвуковою швидкістю і його завершенням є момент часу, коли порушується умова (7). На третьому етапі – зі спадною дозвуковою швидкістю

і умовою завершення третього етапу є умова (8). На четвертому етапі снаряд рухається зі зростаючими дозвуковою, підзвуковою і надзвуковою швидкостями.

Таблиця 4

**Значення кінематичних параметрів руху снаряда та сили бічного тиску, якщо його швидкість змінювалась від надзвуковою, до підзвукової та дозвукової, та зростаючих дозвукової, підзвукової і надзвукової отримані теоретично та наведені в таблицях стрільб [11]**

$\alpha_i, (i = \overline{144, 211}),$ <i>mil</i>	$t_{ik}, c$	$\theta_{ic}, град$	$x_{ik}, m$	$\dot{x}_{ik}, m/c$	$\dot{z}_{ik}, m/c$	$V_{ik}, m/c$	$H_i, m$	$F_{sw}, H$
$\alpha_{144} = 716,7$	54,314 (54,8)	50°32'	14400 (14400)	206,96	-247,77	320,9	3756	0,47
$\alpha_{146} = 852,8$	61,909 (62,8)	57°27'	14500 (14500)	178,81	-280,24	322,4	4870	5,16
$\alpha_{151} = 949,2$	66,666 (67,9)	62°15' (62°36')	14000 (14000)	158,52	-301,28	340,4 (324)	5654 (5674)	11,36
$\alpha_{161} = 1045,7$	70,863 (72,5)	67°04' (66°53')	13000 (13000)	135,51	-320,26	347,8 (328)	6407 (6410)	18,92
$\alpha_{171} = 1112,6$	73,401 (75,4)	70°32' (69°52')	12000 (12000)	117,36	-332,11	352,2 (330)	6896 (6879)	25,59
$\alpha_{181} = 1166,5$	75,191 (77,6)	73°32' (72°20')	11000 (11000)	100,7	-340,9	355,5 (331)	7262 (7226)	32,77
$\alpha_{191} = 1212,2$	76,493 (79,3)	76°23' (74°32')	10000 (10000)	84,26	-347,88	357,9 (332)	7549 (7491)	41,64
$\alpha_{201} = 1251,2$	77,385 (80,8)	79°20' (76°37')	9000 (9000)	66,62	-353,7	359,9 (332)	7776 (7696)	54,18
$\alpha_{211} = 1283,6$	77,885 (82,3)	82°40' (78°42')	8000 (8000)	46,12	-358,4	361,4 (333)	7950 (7849)	73,29

У таблиці 4 в останньому стовпчику вказана величина рівнодійної сили бічного тиску та її розмірність  $[F_{sw}] = H$ .

На основі теоретичних досліджень представлені траєкторія руху снаряда (рис. 1) та графік зміни його швидкості (рис. 2).

Порівнюючи теоретичні значення та табличні можна стверджувати:

- таблична тривалість лету снаряда є більшою від теоретичної та зі збільшенням кута прицілювання різниця між ними зростає і досягає 4,4 с;

- значення кутів падіння снаряда, визначених теоретично і вказаних в таблиці, суттєвою відрізняються і теоретичні значення є більшими від табличних;

- теоретичні значення кінцевих швидкостей снаряда є значно більшими від вказаних у таблиці;

- теоретичні максимальні висоти траєкторії руху снаряда є більшими від вказаних в таблиці і зі збільшенням кута прицілювання різниця між ними зростає;

- рівнодійна сили бічного тиску зі збільшенням кута прицілювання зростає.

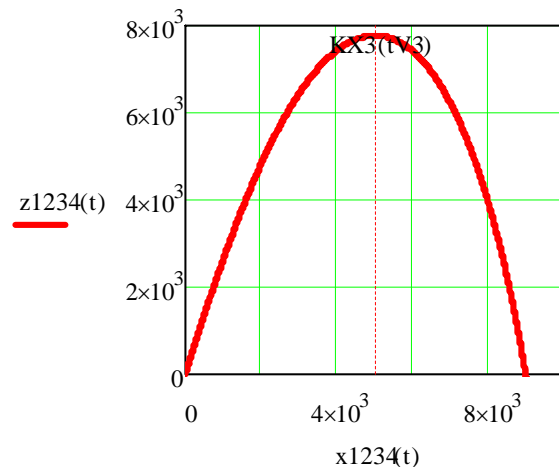


Рис. 1. Траєкторія руху снаряда випущеного під кутом  $\alpha = 1251,2 \text{ mil}$

На проміжку від  $KX3(tV3)$  до приземлення снаряд рухається зі дозвуковою, підзвуковою та надзвуковою зростаючими швидкостями. Максимальна висота траєкторії руху снаряда  $H = 7776 \text{ м}$  та її горизонтальна координата  $x_H = 5032 \text{ м}$ . Зростання швидкості снаряда спостерігається, якщо  $x \geq 5056 \text{ м}$ .

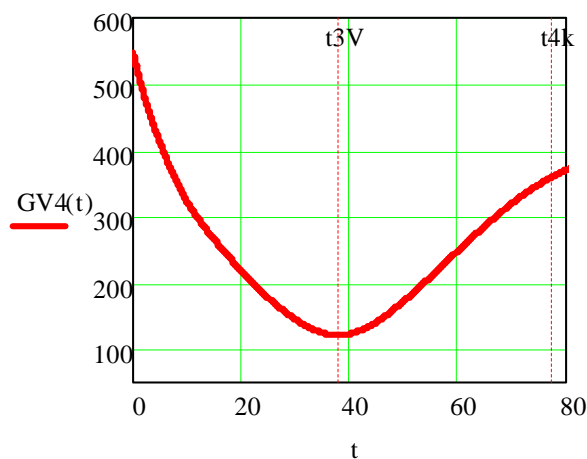


Рис. 2. Графік зміни швидкості снаряда, випущеного під кутом  $\alpha=1251,2\text{ mil}$

На проміжку часу ( $t3V$ ,  $t4k$ ) снаряд рухається з дозвуковою, підзвуковою і надзвуковою зростаючими швидкостями. Мінімальна швидкість снаряда  $V3(t3V)=1216\frac{M}{c}$ .

### Висновок

При порівнянні результатів теоретичних досліджень, отриманих з використанням запропонованої математичної моделі, з відповідними величинами, вказаними у таблицях стрільб [11], можна стверджувати, що при кутах прицілювання  $\alpha_i \leq 694,4\text{ mil}$  мають місце:

- відхилення між теоретично визначеними координатами точок обнуління траєкторії та наведеними в таблицях стрільб є в межах 5 метрів;

- максимальна висота лету снаряда, визначена теоретично, несуттєво відрізняється від величин, вказаних у таблиці стрільб, хоча при збільшенні кута прицілювання різниця між ними досягає 21 м (теоретичне значення 3184 м – табличне 3205 м при стрільбі на дальність 14000 м);

- тривалість лету снаряда, визначена теоретично, переважно дорівнює відповідному табличному значенню, хоча зі збільшенням дальності стрільби різниця дорівнює 0,4 с (при стрільбі на дальність 14300 м теоретична тривалість лету становить 53 с – таблична 53,4 с.)

- кут падіння снаряда, визначений теоретично, незначно відрізняється від відповідного табличного, проте при збільшенні кута прицілювання виникають розбіжності (при стрільбі на дальність 14000 м теоретичне значення кута падіння снаряда  $46^{\circ}43'$  – табличне  $47^{\circ}28'$ );

- кінцева швидкість снаряда, визначена теоретично, є незначно більшою від відповідних значень, вказаних у таблицях стрільб, однак відхилення досягають

$7\frac{M}{c}$  при стрільбі на 14000 м (теоретичне значення  $315\frac{M}{c}$  – табличне  $308\frac{M}{c}$ ).

Вище наведене дає підстави стверджувати, що запропонована авторами математична модель дослідження руху снаряда в повітрі може бути використана при розв'язуванні відповідних задач зовнішньої балістики.

При кутах прицілювання  $716,7\text{ mil} \leq \alpha_i$  мають місце певні розбіжності між теоретичними та табличними значеннями щодо тривалості лету снаряда до 5%, куту падіння до 5%, кінцевій швидкості – до 8,5% і максимальній висоті траєкторії руху до 1,3%.

Автори стверджують, що ці розбіжності ініційовані появою сили бічного тиску повітря  $\bar{F}_{sw}$  на снаряд, яка виникає при зростанні швидкості руху снаряда, та яку не враховували при складанні таблиць стрільби.

Запропонована математична модель дозволяє автоматизувати процес розв'язування прямої і оберненої задач зовнішньої балістики з врахуванням стандартних і нестандартних умов стрільби та може бути використана для складання таблиць стрільби для певних типів зброї.

### Список літератури

1. McCoy R. L., Modern Exterior Ballistics. The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles. 2012. 328 p.
2. Carlucci Donald E. and Sidney S. Jacobson. Ballistics: theory and design of guns and ammunition. 2008. 514 p.
3. Lewtas Ian, Mcalister Rachael, Wallis Adam, Woodley Clive, Cullis Ian. The ballistic performance of the bombard Mons Meg. *Defence Technology*. № 12. 2016. pp. 59-68. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2015.12.001>
4. Sahoo S., Laha M.K. Coefficient of Drag and Trajectory Simulation of 130 mm Supersonic Artillery Shell with Recovery Plug or Fuze. *Defence Science Journal*, Vol. 64, No. 6, November 2014, pp. 502-508, DOI: 10.14429/dsj.64.8110
5. Bo Zhang, Shushan Wang, Mengyu Cao, Yuxin Xu. Impacts of Deflection Nose on Ballistic Trajectory Control Law. Hindawi Publishing Corporation, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2014, Article ID 984840, 6 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/984840>
6. Balon Rastislav, Komenda Jan. Analysis of the 155 mm ERFB. BB projectile trajectory. *Advances in MT*. № 10. 2006, 10. pp. 91-114.
7. Liang Ke, Zheng Huang, Jing-min Zhang. Optimal design of the aerodynamic parameters for supersonic two-dimensional guided artillery projectile. *Defence Technology*. 2017. № 13. pp. 206-211. <https://dx.doi.org/10.1016/j.dt.2017.05.003/>
8. Zygmunt B., Motyl K., Machowski B., Makowski M., Olejniczak E., Rasztabiga T. Theoretical and experimental research of supersonic missile ballistics. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*. 2015. № 63(1). pp. 229-233. <https://doi.org/10.1515/bpasts-2015-0027/>
9. Грабчак В.І. Бондаренко. С. В. Аналіз існуючих та перспективних методів визначення сили опору повітря руху снарядів. *Військово-технічний збірник*. 2013. № 2 (9). С. 13-19. <https://doi.org/10.33577/2312-4458.9.2013.13-19>

10. Величко Л.Д., Петрученко О.С., Терещук О.В., Нанівський Р.А. Зовнішня балістика снаряда, випущеного з гаубиці. *Військово-технічний збірник*. 2021. № 24. С. 13-20. <https://doi.org/10.33577/2312-4458.24.2021.13-20>

11. Abridged FT 155-AR-2, Part 1. Firing Tables for Cannon, 155MM Howitzer, M284 on Howitzer, Medium, Selfpropelled, 155MM, M109A5, M109A6 and M109A7 and Cannon, 155MM Howitzer, M776 on Howitzer, MEDIUM, Towed, 155MM, M777, M777A1 and M777A2 Firing Projectile, HE, M795. Controlled By: U.S. Army DEVCOM Armaments Center. (U) Headquarters, Department of the Army. Washington, DC, 15 April 2020. 572 p.

## References

1. McCoy R. L. (2012), Modern Exterior Ballistics. The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles. 328 p.
2. Carlucci Donald E. and Sidney S. Jacobson. (2008), Ballistics: theory and design of guns and ammunition. 514 p.
3. Lewtas Ian, Mcalister Rachael, Wallis Adam, Woodley Clive and Cullis Ian. (2016), The ballistic performance of the bombard Mons Meg. *Defence Technology*. Is. 12. pp. 59-68. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2015.12.001>
4. Sahoo S. and Laha M.K. (2014), Coefficient of Drag and Trajectory Simulation of 130 mm Supersonic Artillery Shell with Recovery Plug or Fuze. *Defence Science Journal*, Vol. 64, No. 6, pp. 502-508, DOI: 10.14429/dsj.64.8110
5. Bo Zhang, Shushan Wang, Mengyu Cao and Yuxin Xu. (2014), Impacts of Deflection Nose on Ballistic Trajectory Control Law. Hindawi Publishing Corporation, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2014, Article ID 984840, 6 p., <http://dx.doi.org/10.1155/2014/984840>

6. Balon Rastislav and Komenda Jan. (2006), Analysis of the 155 mm ERFB. BB projectile trajectory. *Advances in MT*. № 10. pp. 91-114.

7. Liang Ke., Zheng Huang and Jing-min Zhang. (2017), Optimal design of the aerodynamic parameters for supersonic two-dimensional guided artillery projectile. *Defence Technology*. № 13. pp. 206-211. <http://dx.doi.org/10.1016/j.dt.2017.05.003/>

8. B. Zygmunt, K. Motyl, B. Machowski, M. Makowski and E. Olejniczak, T. (2015), Rasztabiga Theoretical and experimental research of supersonic missile ballistics. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*. № 63 (1). pp. 229-233. <https://doi.org/10.1515/bpasts-2015-0027/>

9. Grabchak V.I. and Bondarenko S.V. (2013), “Analiz isnyuyuchyh ta perspektyvnyh metodiv vyznachennya syly oporu povitrya ruhu snaryadiv” [Analysis of existing and perspective methods for determining the air resistance force of the projectiles movement], *Military Technical Collection*. No. №2 (9). pp. 13-19. <https://doi.org/10.33577/2312-4458.9.2013.13-19>. [in Ukrainian]

10. Velychko L., Petruchenko O., Tereshchuk O. and Nanivskiy R. (2021), “Zovnishnia balistica snariada, vipyschenogo z gaubici” [Exterior ballistics howitzer projectile]. *Military Technical Collection*. Lviv. № 24. pp. 13-20. DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.24.2021.13-20> [in Ukrainian]

11. (2020), Abridged FT 155-AR-2, Part 1. Firing Tables for Cannon, 155MM Howitzer, M284 on Howitzer, Medium, Selfpropelled, 155MM, M109A5, M109A6 and M109A7 and Cannon, 155MM Howitzer, M776 on Howitzer, MEDIUM, Towed, 155MM, M777, M777A1 and M777A2 Firing Projectile, HE, M795. Controlled By: U.S. Army DEVCOM Armaments Center. (U) Headquarters, Department of the Army. Washington, DC, 15 April 2020. 572 p.

## CALCULATION OF THE HEIGHT OF THE PROJECTILE IN THE CONDITION OF COMPLETING ITS MOVEMENT AT SUBSONIC SPEED

P. Tkachyck, L. Velychko, M. Voitovych, M. Sorokatyi

*One of the factors that affects the dynamics of the projectile is frontal air resistance. It is quite problematic to obtain its functional dependence on projectile speed, air density and temperature, atmospheric pressure, geometric parameters of the projectile and other factors using an analytical method. Their total effect on the movement of the projectile can be determined, with some accuracy, by solving the corresponding inverse problem. On the basis of experimental studies, it was established that the behavior of the force of frontal air resistance significantly depends on whether the projectile moves at supersonic, subsonic or subsonic speeds. Polygon studies establish a discrete relationship between the aiming angle and the firing range at certain values: the type of projectile, its mass, the initial speed of the projectile, air temperature, atmospheric pressure.*

*On the basis of these statements, the authors developed a method for determining the functional dependence of the force of frontal air resistance on the speed and mass of the projectile, atmospheric pressure, air temperature and some other factors based on solving the inverse problem of dynamics. During the movement of the projectile in the air, there is an alternate change in the values of the speed. If the initial speed of the projectile is supersonic, then the projectile will move first with a supersonic falling speed, then with subsonic and subsonic falling speeds. However, at large aiming angles, the projectile can move with increasing speed at the final stage of movement. The functional dependence of the drag force is determined for each stage in particular. However, a feature of projectile motion in the air, when its speed begins to increase, is the emergence of the force of lateral air pressure on the projectile. The latter is directed perpendicular to the velocity of the projectile and downwards. The magnitude of the lateral pressure force depends on the magnitude and direction of the velocity of the projectile, its flight height and some other factors.*

*The developed mathematical model was applied to determine the parameters of the projectile motion of the 3H charge fired from the M777A2 howitzer. A comparison of the kinematic parameters of projectile movement obtained on the basis of the proposed mathematical model with the corresponding values of the firing tables is carried out. It was found that at aiming angles up to 45°, the theoretical results and the corresponding table values almost coincide. At larger aiming angles, there are certain discrepancies between the theoretical results and tabular values, since the authors took into account the force of lateral air pressure on the projectile.*

**Keywords:** external ballistics, projectile dynamics in the air, frontal air resistance, supersonic projectile speed.