

УДК 007.52

DOI: <https://doi.org/10.33577/2312-4458.33.2025.100-108>

Ю.В. Шабатура, В.Д. Залипка

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІКИ НАЗЕМНИХ РОБОТИЗОВАНИХ КОМПЛЕКСІВ З БАГАТОФУНКЦІОНАЛЬНИМИ МАНІПУЛЯТОРАМИ В КРОКУЮЧОМУ РЕЖИМІ

Отримало подальший розвиток дослідження наземних роботизованих комплексів (НРК) щодо покращення їх мобільності, зокрема із застосуванням нового підходу, такого як використання багатофункціональних маніпуляторів (БМ), які окрім своєї функції маніпулювання при необхідності (умови складного рельєфу, обмежений простір тощо) можуть виконувати функцію переміщення НРК у крокуючому або колісному режимі. Проведено теоретичний аналіз динаміки НРК з БМ у крокуючому режимі із розробленням відповідних базових співвідношень. Зокрема отримано відповідні математичні моделі для моментів інерції ланок БМ та здійснено перехід від кінематики до динаміки з визначенням відповідних матриць. Отримано базові співвідношення динаміки НРК з БМ у крокуючому режимі, що дають змогу записати рівняння із виразами, що містять крутні моменти на виконавчих механізмах БМ як функції положення, швидкості та прискорення з'єднань.

Ключові слова: наземний роботизований комплекс, багатофункціональний маніпулятор, динаміка, крокуючий режим.

Постановка проблеми

Перспективні наземні роботизовані комплекси (НРК) з багатофункціональними маніпуляторами (БМ), які можуть окрім функції маніпулювання, в умовах, що обмежують мобільність, виконувати функції крокуючого або колісного руху, реалізовані у формі тетрапода – чотириноєї інженерної мобільної системи, що об'єднує елементи колісного та крокуючого приводів у єдиній конструкції [1]. Очевидним є те, що при подоланні певної відстані на шляху НРК будуть як сприятливі, так і несприятливі умови для його руху. Якщо умови руху сприятливі (тверде покриття, ґрунтова дорога та інша рівнинна місцевість), то безумовно краще для руху НРК, щоб забезпечити належну швидкість, використовувати колісний рушій, якщо ж несприятливі (пороги, ями) – крокуючий. Такий підхід забезпечує НРК високу адаптивність до різноманітних умов експлуатації, включаючи складний рельєф місцевості, перешкоди та обмежений простір. Завдяки такій гібридній структурі, НРК з БМ може змінювати режими руху залежно від характеру середовища, що значно підвищує ефективність функціонування НРК за призначенням.

Фундаментальним фактором, що впливає на особливості руху та вимоги до масо-габаритних параметрів НРК, є хода або спосіб локомоції НРК, що передбачає узгоджений рух різних складових кінцівок і платформи при переміщенні НРК із одного місця до іншого.

На першому етапі дослідження варто зосередити увагу на вивченні динамічних особливостей функціонування НРК з БМ у крокуючому режимі. Незважаючи на універсальність законів руху твердого тіла під дією зовнішніх сил і моментів задача визначення руху НРК з БМ має складну нелінійну природу, оскільки залежить як від фіксованих, так і від змінних параметрів системи. До фіксованих параметрів належать структурно-геометричні характеристики платформи, зокрема конфігурація опорних точок, масово-інерційні властивості та кінематичні обмеження. Змінні параметри включають режими руху (так звані “ходи”), які визначають порядок і ритм пересування опорних елементів. У зв'язку з цим для ефективного моделювання необхідно використовувати адаптивні методи чисельного аналізу, які дозволяють описувати поведінку НРК з БМ в різних умовах функціонування.

Article history: Income 16 June 2025; Revised 10 July 2025; Accepted 09 October 2025; Print 05 December 2025

Шабатура Ю.В. ORCID ID: 0000-0002-9961-1244, Залипка В.Д. ORCID ID: 0000-0002-5189-8370

* Corresponding author zalyпка_w@ukr.net

© Шабатура Ю.В., Залипка В.Д.

ISSN (Online): 2708-5228 / ISSN (Print): 2312-4458

Ліцензія відкритого доступу / Open print license

Таким чином, розробка теоретичних положень (математичних моделей) динаміки НРК з БМ у крокуючому режимі, що враховують зміну між фазами контакту і переносу опор, зміну точки прикладання реакції опори, взаємодію між силовими елементами приводу та середовищем, а також дослідження оптимізації керування рухом НРК з БМ, із урахуванням стабільності, енергетичної ефективності та адаптації до зовнішніх збурень є актуальними та важливими у науково-технічному аспекті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У попередніх роботах [1; 2] запропоновано підхід щодо забезпечення багатофункціональності маніпуляторів НРК за рахунок застосування технології Abenics [3], які при складних умовах руху можуть переходити в режим крокуючого або колісного рушія. Цей підхід дозволяє підвищити мобільність НРК. Розроблено математичні моделі, які описують кінематику НРК з БМ в режимі крокуючого і колісного рушіїв [4; 5], та проведено об'ємне моделювання НРК із застосуванням вказаного підходу в програмному середовищі SolidWorks [6].

Однак у попередніх роботах не проводилось дослідження щодо теоретичного аналізу динаміки НРК з БМ в крокуючому режимі.

Метою статті є проведення теоретичного аналізу динаміки НРК з БМ в крокуючому режимі із розробленням відповідних базових співвідношень.

Виклад основного матеріалу

Інерційні характеристики. У першому наближенні кінематика тетраподної платформи описується положенням і орієнтацією корпусу відносно базової координатної системи, а також положенням кожного БМ у просторі. Основу моделі складає зворотна кінематика - обчислення положень шарнірів та довжин ланок БМ, виходячи з бажаного положення точки опори (кінцевого ефектора БМ). При цьому використовується спрощене уявлення щодо БМ як про "кінцівки-механізми" з обмеженою кількістю ступенів вільності, що дозволяє забезпечити необхідну мобільність НРК. В аналізі стійкості крокуючого НРК з чотирма кінцівками принцип розташування проєкції центра мас відносно опорної площі є ключовим, для забезпечення його стабільності під час руху та у стані спокою. У випадку НРК з чотирма кінцівками, коли всі чотири кінцівки знаходяться в контакті з поверхнею, вони утворюють чотирикутну опорну площу. Чим більша ця площа, тим більша потенційна стійкість.

Кінематичний аналіз дозволяє: визначити допустимі області положення опор (робочий простір БМ); планувати траєкторії переміщення БМ у фазі переносу; оцінювати можливість досягнення бажаної конфігурації тіла платформи НРК з БМ без порушення кінематичних обмежень [7]. Отримана кінематична модель слугуватиме основою для побудови динамічної моделі системи, в якій уже враховуються сили, моменти, масово-інерційні характеристики, взаємодія з опорною поверхнею та зовнішні збурення. Можливість руху традиційного НРК по місцевості із складним рельєфом визначається типом кінематичної схеми шасі, кількістю ведучих коліс та потужністю двигуна приводу. Ці характеристики вибираються під час розробки НРК та закладаються у пам'ять бортового контролера (центрального блока керування) НРК. У разі руху по поверхні система орієнтації НРК визначає кути нахилу рушія. За їх значеннями та за відомими характеристиками рушія та НРК алгоритм керування рухом оцінює можливість руху по такій поверхні та приймає рішення про його продовження визначеним курсом, чи оминання цієї ділянки.

У випадку застосування технологій штучного інтелекту для НРК з БМ окреслених можливостей не достатньо, адже НРК з БМ крім реалізації транспортної функції за рахунок основного рушія може її здійснювати і за рахунок маніпуляторів та долати перешкоди, а не оминати їх. Також слід враховувати, що і самі БМ повинні орієнтуватися в просторі та володіти відповідними тактильними відчуттями, щоб належним чином виконувати функцію маніпулювання.

Технічний вигляд НРК з БМ, який буде досліджуватися, наведено на рис. 1.

Перехід від кінематики до динаміки у загальному випадку вимагає визначення загальної матриці маси, матриці Коріоліса, матриці гравітаційних сил та моделі контактної взаємодії, що за певних наближень буде розглянуто далі.

На рис. 1 прийнято наступні позначення:

1 – кінцевий ефектор, будовою та можливостями якого на даному етапі дослідження будемо нехтувати, а його інерційні характеристики враховувати у наступній ланці; він виконуватиме функцію точки опори при ходьбі; у крокуючому режимі цей елемент може бути використаний для кращого зчеплення з опорною поверхнею та підвищення стабільності при русі в умовах складного рельєфу; 2 – ланка довжиною k ; 3 – з'єднання ланок 2 і 4, що виконане як шарнір для кінематичної пари поворотного типу із одним ступенем вільності; 4 – ланка довжиною L ; 5 – активний кульовий шарнір Abenics із трьома ступенями вільності.

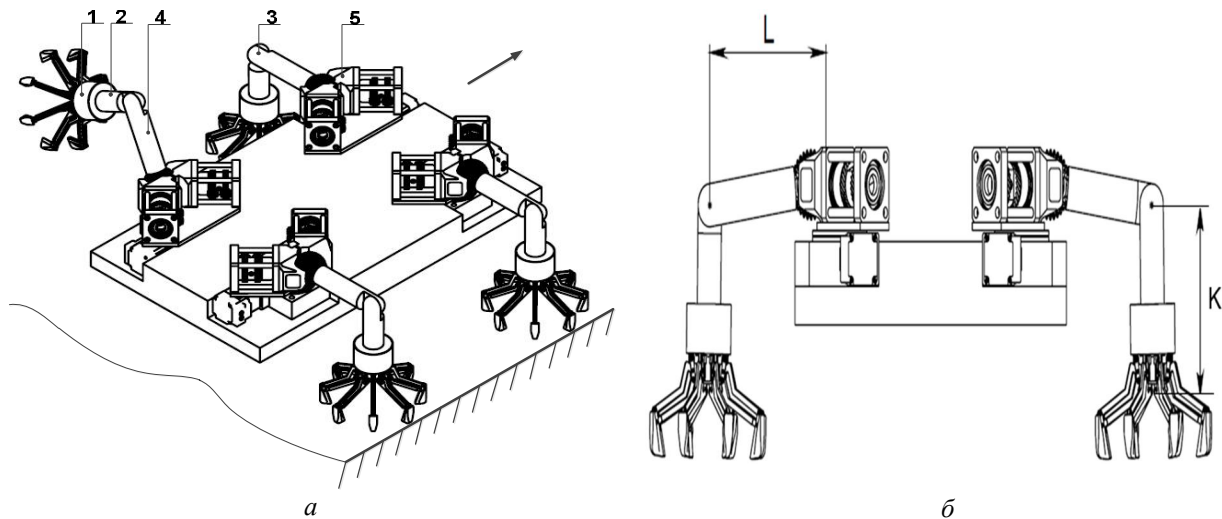


Рис. 1. НРК з БМ: а – вид зверху; б – вид спереду

Інерційні характеристики ланок БМ зазвичай визначають експериментально. Щоб експериментально визначити масу деталі, можна скористатися кількома методами залежно від умов і доступного обладнання. Найпростіший і найточніший метод передбачає використання електронних або механічних ваг з відповідною точністю. Для тіл простої геометричної форми або відомого об'єму можна застосувати обчислення маси за густиною та об'ємом [7]. Наприклад, зразок у формі кругового циліндра довжиною l , діаметром d та густиною ρ матиме масу $m = 0,25\rho\pi d^2 l$. Більшість деталей машин та елементів конструкцій є неоднорідними, і тому теоретичне обчислення їх мас часто має низьку точність та надійність.

Експериментальне визначення моментів інерції деталі можна провести кількома способами, залежно від форми деталі, доступного обладнання та бажаної точності. Основні методи: метод крутильних коливань (обертання навколо заданої осі); метод маятника (коливання у підвішеному стані відносно зовнішньої осі); динамометричний метод (вимірювання реакції на кутове прискорення).

Також для однорідних тіл простої форми широко використовують розрахункові методи. Оскільки більшість деталей машин є неоднорідними, то теоретичне обчислення їх мас часто має низьку точність та надійність, а тому віддають перевагу експериментальним методам. Тим не менш як перше наближення можна скористатись відомими у механіці методами розрахунку.

Момент інерції – це тензор другого рангу (тензор інерції), який у тривимірному просторі описується симетричною матрицею розміром 3×3 :

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Цей тензор має 6 незалежних компонент. Проте можна вибрати осі (головні осі) таким чином, щоб тензор набував діагонального вигляду

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Переважно використовують (вимірюють та обчислюють) моменти інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас. Момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас, має кілька важливих особливостей, які є фундаментальними в механіці:

- мінімальний момент інерції серед усіх паралельних осей;
- вісь через центр мас є природною для опису обертання;
- у разі симетрії розрахунки спрощуються;
- три головні осі інерції завжди проходять через центр мас.

Якщо відомий момент інерції I_c відносно осі, що проходить через центр мас, і маса тіла m , то момент інерції I відносно іншої осі, паралельної даній та віддаленої від неї на відстань d , можна знайти за теоремою Гюйгенса–Штейнера (паралельного перенесення осі)

$$I = I_c + md^2. \quad (3)$$

Ланку БМ у першому наближенні можна моделювати як циліндр довжиною l , діаметром d , густиною ρ та масою m . Такий циліндр в силу симетрії

має два різних моменти інерції: відносно поздовжньої осі I_x та відносно поперечної осі $I_y = I_z$, причому

$$I_x = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{8} md^2, \quad (4)$$

$$I_y = \frac{1}{12} m(l^2 + 3R^2) = \frac{1}{12} m(l^2 + \frac{3}{4} d^2). \quad (5)$$

У випадку обертання навколо осі, що проходить через кінець ланки БМ, маємо згідно із вказаною теоремою значення

$$I = I_y + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2 + \frac{1}{4} mR^2 = \frac{1}{3} ml^2 + \frac{1}{16} md^2 \quad (6)$$

Отже, отримавши відповідні математичні моделі для моментів інерції ланок БМ, що є необхідним для подальших досліджень, відзначимо, що рух НРК з БМ у крокуючому режимі забезпечують чотири ідентичні БМ, прикріплені зверху у кутках власне платформи, що отримує індекс 0 і в подальшому буде вважатись базою у сенсі загальної теорії маніпуляторів [8] при описі із використанням параметрів Денавіта–Хартенберга (DH) [9].

В цілому ж НРК з БМ є деревовидною структурою із сегментами 0 (власне платформа); 1, 2 (БМ FL); 3, 4 (БМ FR); 5, 6 (БМ HR); 7, 8 (БМ HL) (рис. 2) [10]. Подібні моделі широко використовують при моделюванні кінематики та динаміки роботизованих механізмів [11]. Для формалізованої побудови системи застосовуватимемо методику DH-параметрів, де кожен елемент БМ описується матрицею однорідного перетворення. Множачи ці матриці, отримаємо положення кінцевого ефектора відносно тіла платформи [8; 9]. Використання цих нотацій передбачає коректне введення систем координат. За базову приймемо декартову систему координат, прив'язану до платформи. Для зручності при описі кожного БМ його центр суміщатимемо із точкою 5 (рис. 1 а), вісь z скоро-

вуємо угору, вісь y – у напрямку руху платформи, вісь x – перпендикулярно площині yOz , у зовнішньому напрямку.

Усі вихідні числові геометричні параметри НРК з БМ можна умовно поділити на сталі та змінні. Сталі – це довжини K і L (рис. 1 б). Кожна фаланга має 4+1 змінних параметрів, що описують її поточний стан. Це кути $\varphi, \psi, \omega, \chi, \delta$ (рис. 3) (останній описує розкриття кінцевого ефектора, а тому при базовому описі руху ним нехтуємо). Перші три з них можуть бути змінні завдяки відповідним ступеням вільності шарнірного з'єднання Abenics, четвертий – завдяки шарніру 3 (рис.1 а).

Для кращого розуміння розглянемо вищевказані кути:

φ – кут, що задає положення БМ у горизонтальній площині, за відлікове приймемо положення, перпендикулярне до борту платформи НРК з БМ, кут відраховуємо у напрямку умовного руху платформи. Область зміни кута у рамках моделі: від -90° (уперед) до 90° (назад), технологічно область буде меншою;

ψ – кут, що задає положення БМ у вертикальній площині, за відлікове приймемо горизонтальне положення, кут відраховуємо униз. Таким чином, збільшення цього кута матиме наслідком збільшення дорожнього просвіту НРК з БМ і у випадку кріплення БМ до верхньої поверхні НРК, є необхідною умовою руху. Область зміни кута: від -90° (вертикально угору) до 90° (вертикально униз);

ω – кут, що вказує на обертання БМ навколо осі; у колісному режимі, змінюється необмежено, забезпечуючи рух НРК з БМ. Додатним приймемо напрямок обертання за годинниковою стрілкою, якщо спостерігати із додатного напрямку осі Ox (рис. 3);

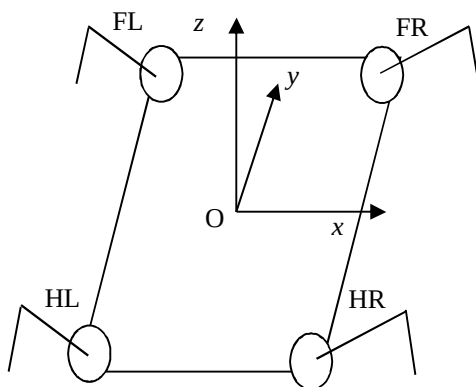


Рис. 2. Схематичне зображення платформи НРК з БМ

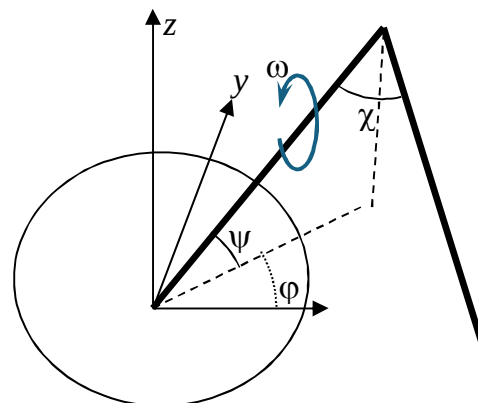


Рис. 3. Окремий БМ

χ – кут між осями ланок БМ; потенційно може змінюватись від 0 до 180°; у останньому випадку БМ матиме прямолінійну форму із загальною довжиною $K+L$ (без кінцевого ефектора).

Задля уніфікації перелічені вище кути позначатимемо наступним чином

$$\varphi = q_1, \psi = q_2, \omega = q_3, \chi = q_4.$$

Їх набір складає простір змінних стану БМ, набір для усіх БМ описує загальну конфігурацію x тетрапода згідно з [10]

$$x = [x_{FR} x_{HR} x_{FL} x_{HL}], \quad x_{Leg} = [q_1, q_2, q_3, q_4],$$

$$Leg = \{FR, HR, FL, HL\}.$$

Кінематичний опис. Модельний опис режиму переміщення (кінематична модель) передбачає вибір послідовності фаз, що формують цикл переміщення (називатимемо його кроком), замкнутий у тому сенсі, що після його завершення БРП буде перебувати у тій самій геометричній конфігурації, але в іншій точці простору. Ймовірно, перший та останній кроки при переміщенні можуть відрізнитись від основного кроку й слугувати для переходу до іншого режиму.

Розглянемо, як параметр X визначає положення кінцевого ефектора у просторі. Виконаємо це із використанням параметрів ДН. Для кінематики достатньо використовувати системи координат, суміщені із ланками (0 – із базою, 1 – із шарніром 3 (рис. 1 а); 2 – із кінцевим ефектором), у випадку динаміки більш зручно буде також використовувати системи координат, суміщені із центром мас ланок.

Для того, щоб від системи координат бази $\{x_0, y_0, z_0\}$ перейти до системи з індексом 1, слід виконати поворот довкола осі Oz_0 на кут q_1 матриця якого

$$\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

далі поворот довкола осі Oy_0 на кут q_2 , матриця якого

$$\begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

згодом поворот довкола осі Ox_0 на кут q_3 , матриця якого:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -s_3 \\ 0 & s_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де $c_j = \cos q_j$, $s_j = \sin q_j$, $j = 1, 2, 3$.

Матриця 0_1R повороту-переходу від системи $\{1\}$ до системи $\{0\}$ отримується множенням перелічених матриць:

$${}^0_1R = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1c_3 - c_1s_2s_3 & s_1s_3 - c_1s_2c_3 \\ s_1c_2 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1s_3 - s_1s_2c_3 \\ s_2 & c_2s_3 & c_2c_3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Загальна матриця однорідного перетворення включатиме крім повороту також перенос до потрібної точки простору (центру мас ланки 1 або точки з'єднання ланок 1 та 2). Якщо вектор переносу є

$${}^0P = \begin{bmatrix} 0 & x_P & 0 & y_P & 0 & z_P \end{bmatrix}^T,$$

то у позначеннях [8] маємо:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} {}^0_1R & {}^0P \\ 000 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1c_3 - c_1s_2s_3 & s_1s_3 - c_1s_2c_3 & 0 & x_P \\ s_1c_2 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1s_3 - s_1s_2c_3 & 0 & y_P \\ s_2 & c_2s_3 & c_2c_3 & 0 & z_P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Для випадку точки з'єднання ланок маємо

$${}^0P = \begin{bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

У точці з'єднання ланок виконуємо поворот навколо осі Oy_1 , матриця якого

$${}^1_2R = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Відповідна матриця однорідного перетворення із переходом до кінцевого ефектора буде мати вигляд

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & K \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Відповідна матриця однорідного перетворення із переходом від бази до кінцевого ефектора буде мати вигляд

$${}^0T_2^1 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1c_3 - c_1s_2s_3 & s_1s_3 - c_1s_2c_3 & 0 \\ s_1c_2 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1s_3 - s_1s_2c_3 & 0 \\ s_2 & c_2s_3 & c_2c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & K \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_2c_4 + s_1s_3s_4 & -s_1c_3 - c_1s_2s_3 & -c_1c_2s_4 + s_1s_3c_4 - c_1s_2c_3c_4 & Kc_1c_2 + {}^0x_P \\ s_1c_2c_4 - s_1s_3s_4 - s_1s_2c_3s_4 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2s_4 - s_1s_3c_4 - s_1s_2c_3c_4 & Ks_1c_2 + {}^0y_P \\ s_2c_4 + c_2c_3s_4 & c_2s_3 & -s_2s_4 + c_2c_3c_4 & Ks_2 + {}^0z_P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Таким чином отримавши необхідні матриці переходимо до розробки базових співвідношень динаміки НРК з БМ.

Базові співвідношення динаміки. Під час руху одна або більше кінцівок можуть відірватися від опорної поверхні. У такому випадку опорна площа зменшується, і контроль за розміщенням центра мас стає критичним. Часто застосовується алгоритм "штативної" (трикутної) стійкості: три кінцівки залишаються на опорній поверхні, утворюючи стабільну трикутну площу, всередині якої повинен залишатися центр мас.

У зв'язку із великою кількістю параметрів та громіздкістю явного запису при дослідженні законів руху багатоланкових маніпуляторів в цілому та при їхньому застосуванні до руху крокуючих роботів зокрема, переважно використовують матричний запис [12], а практичні обчислення здійснюють чисельним способом із залученням відповідних пакетів комп'ютерних програм та покрокових алгоритмів [8; 11; 13].

У випадку НРК з БМ, що розглядається, основними причинами руху є зусилля, які розвиває БМ в режимі крокуючого руху, змінюючи параметри (внутрішні змінні) $x_{Leg} = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ для кожного БМ. У випадку механізму Abenics, прототип якого описано у праці [3], рух забезпечують два модулі керування, кожен із яких обладнаний двома електродвигунами, шарнір у точці з'єднання ланок містить звичайну кінематичну пару, що може бути реалізована як електричний чи гідравлічний механізм. У кожному разі за зміну параметрів стану БМ $q_i (i=1,2,3,4)$ відповідають силові моменти $n_i (i=1,2,3,4)$. Задача динаміки НРК з БМ передбачає знаходження закону руху механізму під дією системи заданих сил (моментів) та знаходження сил (моментів), що забезпечують бажану кінематику. Зазвичай існує множина рішень задачі, кожне із яких дає змогу забезпечити бажаний рух.

Повний алгоритм обчислення моментів, що відповідають внутрішнім змінним x_{Leg} складається із двох частин [8; 14-16]. Спершу записують вектори швидкостей та прискорень від першого до кінцевого

елемента і для кожного із них записують рівняння Ньютона-Ейлера

$$F = m\dot{v}_c, \quad N = c_I\dot{\omega} + \omega \times c_I\omega, \quad (16)$$

де, m – маса елемента; c_I – тензор інерції елемента у системі відліку, суміщений із центром мас; v_c – лінійна швидкість центра мас; ω – кутова швидкість обертання тіла у власній системі координат, крапкою відзначено похідну по часу; символ “ $\times$ ” позначає операцію векторного добутку векторів.

Далі сили та моменти взаємодії обчислюються рекурсивно від кінцевого до першого елемента. Послідовно маємо:

$${}^1\omega_1 = {}^1R^0\omega_0 + \dot{q}_1{}^1\ddot{Z}_1 + \dot{q}_2{}^1\ddot{Y}_1 + \dot{q}_3{}^1\ddot{X}_1, \quad (17)$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = {}^1R^0\dot{\omega}_0 + {}^1R^0\omega_0 \times \dot{q}_1{}^1\ddot{Z}_1 + \dot{q}_1{}^1\ddot{Z}_1 + \dot{q}_2{}^1\ddot{Y}_1 + \dot{q}_3{}^1\ddot{X}_1, \quad (18)$$

$${}^1\dot{v}_1 = {}^1R({}^0\dot{\omega}_0 \times {}^0P_1 + {}^0\omega_0 \times ({}^0\omega_0 \times {}^0P_1) + {}^0\dot{v}_0), \quad (19)$$

$${}^1\dot{v}_{c_1} = {}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1P_{c_1} + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1P_{c_1}) + {}^1\dot{v}_1, \quad (20)$$

$${}^1F_1 = m_1{}^1\dot{v}_{c_1}, \quad (21)$$

$${}^1N_1 = c_1I_1{}^1\dot{\omega}_1 + {}^1\omega_1 \times c_1I_1{}^1\omega_1, \quad (22)$$

$${}^2\omega_2 = {}^2R^1\omega_1 + \dot{q}_4{}^2\ddot{Z}_2, \quad (23)$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = {}^2R^1\dot{\omega}_1 + {}^2R^1\omega_1 \times \dot{q}_4{}^2\ddot{Z}_2 + \dot{q}_4{}^2\ddot{Z}_2, \quad (24)$$

$${}^2\dot{v}_2 = {}^2R({}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1P_2 + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1P_2) + {}^1\dot{v}_1), \quad (25)$$

$${}^2\dot{v}_{c_2} = {}^2\dot{\omega}_2 \times {}^2P_{c_2} + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times {}^2P_{c_2}) + {}^2\dot{v}_2, \quad (26)$$

$${}^2F_2 = m_2{}^2\dot{v}_{c_2}, \quad (27)$$

$${}^2N_2 = c_2I_2{}^2\dot{\omega}_2 + {}^2\omega_2 \times c_2I_2{}^2\omega_2, \quad (28)$$

У рекурсивній частині алгоритму отримаємо співвідношення:

$${}^1f_1 = {}^1R^2f_2 + {}^1F_1, \quad (29)$$

$${}^1n_1 = {}^1N_1 + {}^1R^2n_2 + {}^1P_{c_1} \times {}^1F_1 + {}^1P_2 \times {}^1R^1f_1, \quad (30)$$

$$\tau_1 = {}^1n_1^T {}^1\ddot{Z}_1, \quad (31)$$

$${}^0f_0 = {}^0R^1f_1 + {}^0F_0, \quad (32)$$

$${}^0n_0 = {}^0N_0 + {}^0R^1n_1 + {}^0P_{c_0} \times {}^0F_0 + {}^0P_1 \times {}^0R^0f_0, \quad (33)$$

$$\tau_0 = {}^0n_0^T {}^0\ddot{Z}_0, \quad (34)$$

де ${}^i\hat{A}_j$ – вектор орта осі $A (A = X, Y, Z)$ ланки j у системі координат, пов'язаній із ланкою $i, {}^i\omega_j, {}^i\dot{\omega}_j, {}^i\ddot{\omega}_j, {}^i\dot{v}_j, {}^i\ddot{v}_j$ та ${}^i\dot{v}_{c_j}$ аналогічним чином задані вектори кутової швидкості, кутового прискорення, лінійного прискорення ланки та лінійного прискорення центра мас ланки j ;

jF_j – рівнодійна сила, що діє на ланку j у власній системі координат;

jf_j – сила, що діє на ланку j у власній системі координат з боку ланки $j-1 ({}^jF_j = {}^jf_j - {}^jR^{j+1}f_{j+1})$;

аналогічно jN_j та jn_j – сумарний момент сили та момент сили з боку попередньої ланки у кінематичному ланцюгу;

${}^jP_{c_j}$ та c_jP_j – вектори, що дозволяють перейти від системи координат ланки j до її центра ваги, і навпаки;

τ_k – сумарний зовнішній момент, приведений до привода k .

При цьому моменти у приводах 0 (база – активне з'єднання Abenics) та 1 (шарнір – точка з'єднання ланок) можуть бути пов'язані за допомогою наведених вище співвідношень із моментом і силами, що діють на кінцевий ефектор. У випадку, якщо БМ перебуває у стадії переносу ці моменти і сили рівні нулю. Якщо ж БМ є опорним, то сили і моменти будуть залежати від параметрів ходи та інших факторів.

Для врахування сили тяжіння приймаємо, що база має стале прискорення ${}^0\dot{v}_0 = g\hat{Y}_0$. Для того, щоб отримати 0R та 1R , слід у співвідношеннях (7)-(10) для 0R та (13) для 1R : замінити s_i на $-s_i$.

Таким чином, отримані співвідношення дають змогу записати рівняння із виразами, що містять крутні моменти на виконавчих механізмах як функції положення, швидкості та прискорення з'єднань. Такі співвідношення слід записати для кожного із БМ та доповнити належними граничними умовами, що описують умови контакту БМ (якщо він перебуває у опорній фазі) із поверхнею та врахувати зміну умов контакту під час циклу ходи.

Висновки

Проведено теоретичний аналіз динаміки НРК з БМ у крокуючому режимі із розробленням відповідних базових співвідношень.

Розроблено математичні моделі для моментів інерції ланок БМ: якщо відомий момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас та у випадку обертання навколо осі, що проходить через кінець ланки БМ.

Визначено положення кінцевого ефектора у просторі із використанням параметрів Денавіта–Хартенберга. Здійснено перехід від кінематики до динаміки з визначенням відповідних матриць.

Отримано базові співвідношення динаміки НРК з БМ у крокуючому режимі дають змогу записати рівняння із виразами, що містять крутні моменти на виконавчих механізмах БМ як функції положення, швидкості та прискорення з'єднань.

З'ясовано, що моменти у приводах можуть бути пов'язані за допомогою наведених вище співвідношень із моментом і силами, що діють на кінцевий ефектор. У випадку, якщо БМ перебуває у стадії переносу, ці моменти і сили рівні нулю. Якщо ж БМ є опорним, то сили і моменти будуть залежати від параметрів ходи та інших факторів.

Встановлено, що у зв'язку із великою кількістю параметрів та громіздкістю запису виразів при дослідженні законів руху багатоланкових маніпуляторів в цілому та при їхньому застосуванні до руху крокуючих роботів зокрема, переважно використовують матричний запис, а практичні обчислення здійснюють чисельним способом із залученням відповідних пакетів комп'ютерних програм та покрових алгоритмів.

Список літератури

1. Залипка В.Д. Конструкційні особливості маніпулятора-рушія для багатоцільових роботизованих платформ. *Збірник наукових праць*. Черкаси: ДНДІВС, 2024. № 3 (21). С. 35-42. DOI: 10.37701/dndivsovt.21.2024.04
2. Залипка В.Д. Забезпечення багатофункціональності засобів взаємодії багатоцільових роботизованих платформ із зовнішніми об'єктами та середовищем застосування технології Abenics. *Системи озброєння і військова техніка*. Харків: ХУПС, 2023. № 3 (75). С. 53-59. DOI: 10.30748/soivt.2023.75.06
3. Kazuki Abe, Kenjiro Tadakuma, Riichiro Tadakuma. Abenics: Active Ball Joint Mechanism With Three-DoF Based

on Spherical Gear Meshings. *April 2021 IEEE Transactions on Robotics PP(99)*. DOI:10.1109/TRO.2021.3070124.

4. Залипка В. Д. Кінематика руху багатоцільових роботизованих платформ з багатофункціональними маніпуляторами в режимі крокуючого рушія. *Системи озброєння і військова техніка*. Харків: ХНУПС, 2024. 2 (78). С. 55-64. DOI: 10.30748/soivt.2024.78.06

5. Залипка В. Д. Кінематика руху багатоцільових роботизованих платформ з багатофункціональними маніпуляторами в режимі колісного рушія. *Збірник наукових праць*. Харків: ХНУПС, 2024. №2 (80). С. 124-133. DOI: 10.30748/zhups.2024.80.16

6. Залипка В. Д. Моделювання засобів взаємодії багатоцільових роботизованих платформ із зовнішніми об'єктами та середовищем в процесі їх трансформації. *Науковий вісник НЛТУ України*. 2023. Вип. 33(4). С. 65-70. DOI:10.36930/40330409

7. Кініцький Я. Т. Теорія механізмів і машин : підручник. К.: Наукова думка, 2002. 662 с.

8. Craig J. J. Introduction to robotics: mechanics and control, 3/E. 2009. Pearson Education India.

9. Alshamasin M. S., Ionescu F., Al-Kasasbeh R. T. Modelling and simulation of a SCARA robot using solid dynamics and verification by MATLAB/Simulink. *International Journal of Modelling, Identification and Control*. No. 15 (1). 2012. pp. 28-38.

10. Kimura H., Shimoyama I., Miura H. Dynamics in the dynamic walk of a quadruped robot. *Advanced Robotics*, No. 4 (3). 1989. pp. 283-301.

11. Featherstone R., Orin D. Robot dynamics: equations and algorithms. In *Proceedings 2000 ICRA. Millennium conference. IEEE international conference on robotics and automation. Symposia proceedings*, 2000, April. Cat. No. 00CH37065. Vol. 1, pp. 826-834.

12. Adak Ö. K. Quadruped locomotion reference synthesis with central pattern generators tuned by evolutionary algorithms (Doctoral dissertation). 2013.

13. Mahapatra A., Roy S. S., Pratihari D. K. Modeling and simulation of wave gait of a hexapod walking robot: A CAD/CAE approach. *IAES International Journal of Robotics and Automation*, No. 2 (3), 2013. 104 p.

14. Xiaoqiu Xu, Han Tao, Junwei Han. Shock Mechanism Analysis and Simulation of High-Power Hydraulic Shock Wave Simulator. *Research Article. Open Access*. Volume 2017. Article ID 4361256 [LA1], DOI:10.1155/ 2017/4361256

15. İrem Mertüzyü, Alper K. Tanyıldızı, Beyda Taşar, Ahmet B. Tatar, Oğuz Yakut. Fuhar: A Transformable Wheel-Legged Hybrid Mobile Robot. *Robotics and Autonomous Systems*. Volume 133, November 2020, 103627. 21 pages. DOI:10.1016/j.robot.2020.103627

16. S. Tao A transformable wheel-legged mobile robot: Design, analysis and experiment, *Robotics and Autonomous Systems*, 98. 2017. 30-41. DOI:10.1016/j.robot.2017.09.008

References

1. Zalyпка V.D. (2024), "Konstruktsiini osoblyvosti manipulatora-rushia dlia bahatotsilovykh robotyzovanykh platform" [Mathematical methods of operations research and analysis of complex air defense weapons systems. The problem of

testing statistical hypotheses as a linear programming problem] *Zbirnyk naukovykh prats*. Cherkasy: DNDIVS. No. 3 (21). pp. 35-42. DOI: 10.37701/dndivsovt.21.2024.04 [in Ukrainian]

2. Zalyпка V.D. (2023), "Zabezpechennia bahatofunktsionalnosti zasobiv vzaemodii bahatotsilovykh robotyzovanykh platform iz zovnishnimy ob'ektamy ta seredovyschem zastosuvanniam tekhnologii Abenics" [Ensuring the rich functionality of the interaction of rich robotic platforms with external objects and the core of Abenics technology] *Armor systems and military equipment*. Kharkiv: KhUPS. No, 3 (75). pp. 53-59. DOI: 10.30748/soivt.2023.75.06 [in Ukrainian]

3. Kazuki Abe, Kenjiro Tadakuma and Riichiro Tadakuma. (2021), Abenics: Active Ball Joint Mechanism With Three-DoF Based on Spherical Gear Meshings. *April 2021 IEEE Transactions on Robotics PP(99)*. DOI: 10.1109/ TRO. 2021. 3070124.

4. Zalyпка V. D. (2024), "Kinematyka rukhu bahatotsilovykh robotyzovanykh platform z bahatofunktsionalnymy manipulatoramy v rezhymy krokuichoho rushiia" [Kinematics of the collapse of rich robotic platforms with richly functional manipulators in the mode of crippling collapse]. *Armor systems and military equipment*. Kharkiv: KhNUPS. No. 2 (78). pp. 55-64. DOI: 10.30748/soivt.2024.78.06 [in Ukrainian]

5. Zalyпка V. D. (2024), "Kinematyka rukhu bahatotsilovykh robotyzovanykh platform z bahatofunktsionalnymy manipulatoramy v rezhymy kolisnoho rushiia" [Kinematics of the rumble of rich robotic platforms with richly functional manipulators in the wheeled rumble mode.. Kharkiv: KHNUPS]. *Collection of scientific works*. Kharkiv: KhNUPS,. No. 2 (80). pp. 124-133. DOI: 10.30748/zhups.2024.80.16 [in Ukrainian]

6. Zalyпка V. D. (2023), "Modeliuvannia zasobiv vzaemodii bahatotsilovykh robotyzovanykh platform iz zovnishnimy ob'ektamy ta seredovyschem v protsesi yikh transformatsii" [Modeling the interaction between a wide range of robotic platforms and external objects and the core in the process of their transformation]. *Scientific newsletter of NLTU of Ukraine*. Vyp. 33 (4). pp. 65-70. DOI:10. 36930/40330409 [in Ukrainian]

7. Kinytskyi Ya. T. (2002), "Teoriia mekhanizmiv i mashyn : pidruchnyk" [Theory of mechanisms and machines: handyman]. K.: Naukova dumka. 662 p. [in Ukrainian]

8. Craig J. J. (2009), Introduction to robotics: mechanics and control, 3/E. Pearson Education India.

9. Alshamasin, M. S., Ionescu, F. and Al-Kasasbeh, R T. (2012), Modelling and simulation of a SCARA robot using solid dynamics and verification by MATLAB/Simulink. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, No. 15 (1), pp. 28-38.

10. Kimura H., Shimoyama I., and Miura H. (1989), Dynamics in the dynamic walk of a quadruped robot. *Advanced Robotics*, No. 4 (3). pp. 283-301.

11. Featherstone R. and Orin D. (2000, April). Robot dynamics: equations and algorithms. In *Proceedings 2000 ICRA. Millennium conference. IEEE international conference on robotics and automation*. Symposia proceedings. Cat. No. 00CH37065. Vol. 1, pp. 826-834.

12. Adak Ö. K. (2013), Quadruped locomotion reference synthesis with central pattern generators tuned by evolutionary algorithms (Doctoral dissertation).

13. Mahapatra A., Roy S. S. and Pratihari D. K. (2013), Modeling and simulation of wave gait of a hexapod walking robot: A CAD/CAE approach. *IAES International Journal of Robotics and Automation*, No. 2 (3), 104.

14. Xiaoqiu Xu, Han Tao and Junwei Han. Shock Mechanism Analysis and Simulation of High-Power Hydraulic Shock Wave Simulator. Research Article. Open Access. Volume 2017. Article ID 4361256 [LA1], DOI:10.1155/2017/4361256

15. İrem Mertçü, Alper K. Tanyıldızı, Beyda Taşar, Ahmet B. Tatar and Oğuz Yakut. Fuhar (2020), A Transformable Wheel-Legged Hybrid Mobile Robot. *Robotics and Autonomous Systems*. Volume 133, November 2020, 103627. 21 pages. DOI:10.1016/j.robot.2020.103627

16. S. Tao, A transformable wheel-legged mobile robot: Design, analysis and experiment, *Robotics and Autonomous Systems*, 98, (2017), 30-41. DOI:10.1016/j.robot.2017.09.008

THEORETICAL ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF GROUND ROBOTIC COMPLEXES WITH MULTIFUNCTIONAL MANIPULATORS IN THE STEPPING MODE

Y. Shabatura, V. Zalyпка

A theoretical analysis of the dynamics of ground robotic complexes (GRCs) with multifunctional manipulators (MMs) in a walking mode was carried out with the development of the corresponding basic relations. Mathematical models were developed for the moments of inertia of the MM links: if the moment of inertia is known relative to the axis passing through the center of mass and in the case of rotation around the axis passing through the end of the MM link. The position of the end effector in space was determined using the Denavit-Hartenberg (DH) parameters, for the formal construction of the system, the DH-parameters method was used, where each MM element is described by a homogeneous transformation matrix. As a result of multiplying these matrices, the position of the end effector relative to the platform body is obtained. A transition from kinematics to dynamics was made with the definition of the corresponding matrices. The obtained basic dynamics relations of the GRC with MM in the walking mode allow us to write equations with expressions containing torques on the actuators of the MM as functions of the position, velocity and acceleration of the joints. It was found that the moments in the drives can be related using the given relations to the moment and forces acting on the end effector. For the GRC with MM under consideration, the main causes of movement are the forces that the MM develops in the walking motor mode, changing the parameters (internal variables) for each MM. In the case when the MM is in the transfer stage, these moments and forces are zero. If the MM is a support, then the forces and moments will depend on the parameters of the gait and other factors. It has been established that due to the large number of parameters and the cumbersome of writing expressions when studying the laws of motion of multi-link manipulators in general and when applying them to the motion of walking robots in particular, matrix notation is mainly used, and practical calculations are carried out numerically with the involvement of appropriate computer program packages and step-by-step algorithms. This study lays down the methodological foundations for the creation and application of GRC with MM and is of interest to specialists in the field of development of mobile robotic systems.

Keywords: ground robotic complex, multifunctional manipulator, dynamics, walking mode.